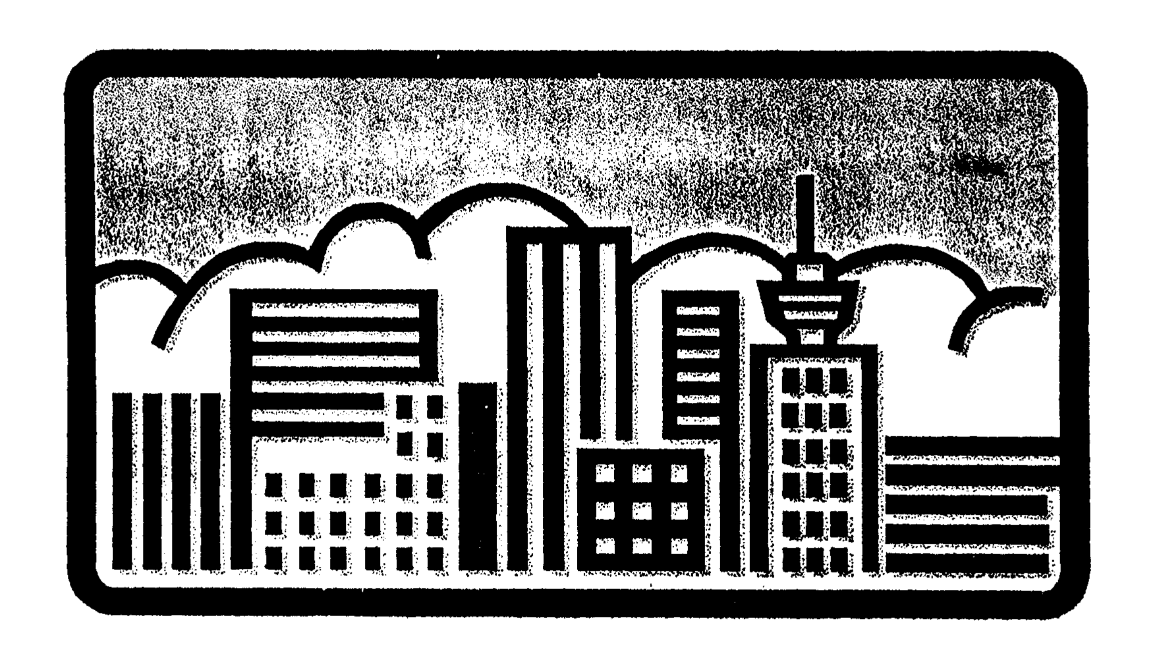
نظرية الانشاءات

المحددة استاتيكيا



تأليف

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى

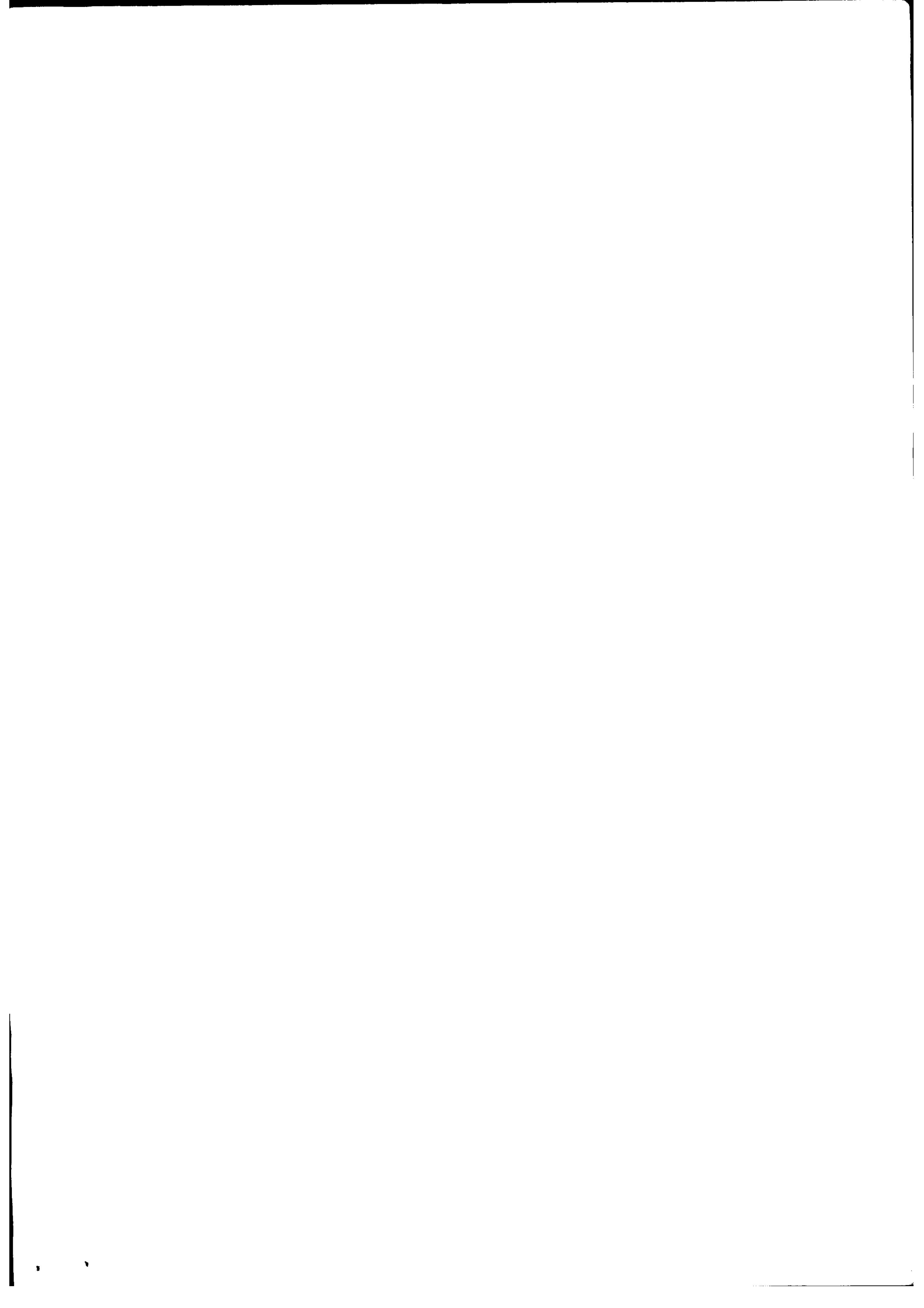
نظرية الإنشاءات

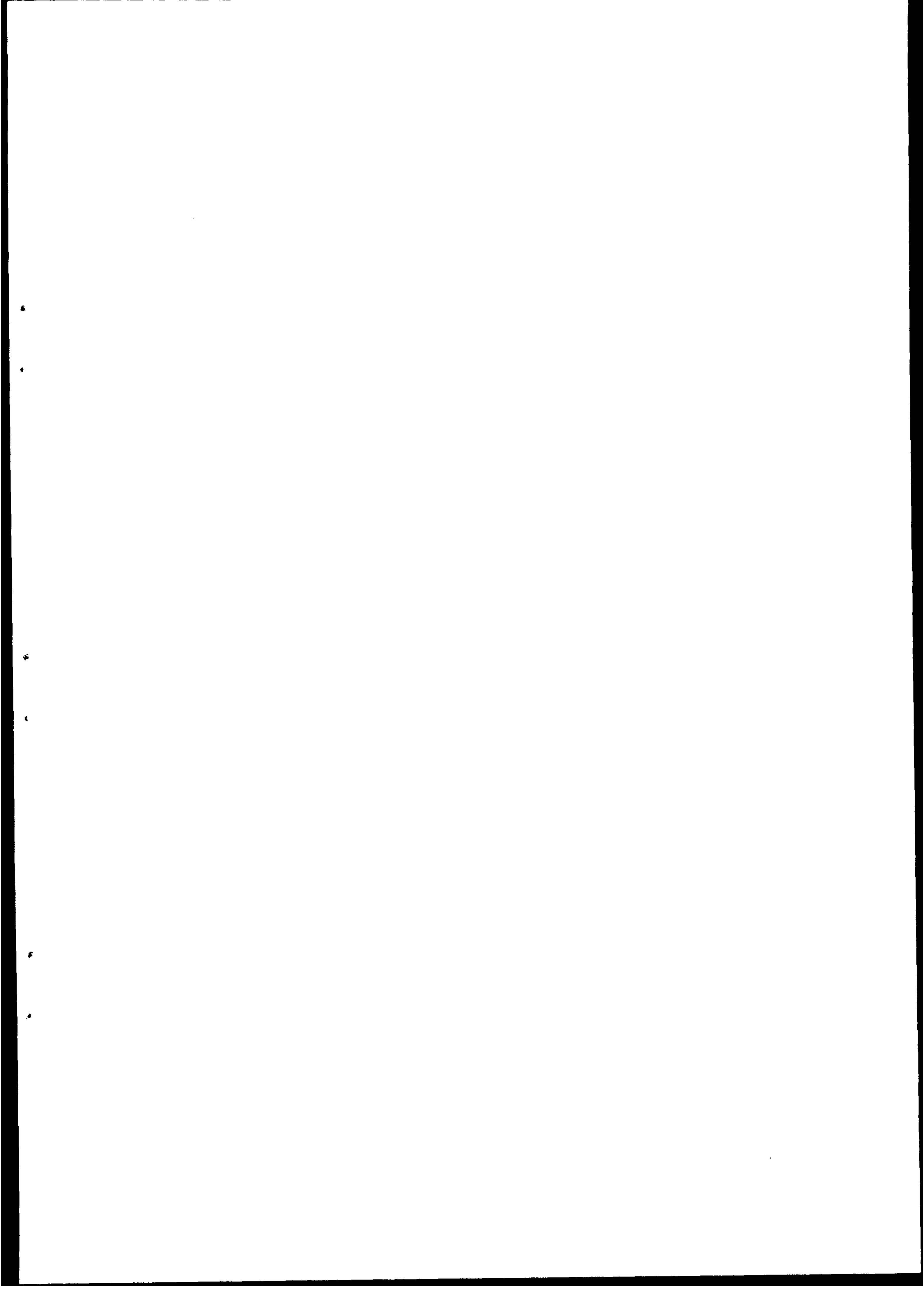
المحددة استاتيكيا

الفصل الأول
مقدمة

تأليف

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى





مقدمة

هذا الكتاب محاولة لتقديم أساسيات التحليل التقليدي للمنشآت ، ويتطلب هذا المنهج معرفة سابقة لمبادئ الاستاتيكا ومقاومة المواد والجبر.

يبدأ الكتاب بالمبادئ الأساسية للتحليل الإنشائي لمستوي ما قبل التخرج (junior) ، ثم تتعرض باقي موضوعات الكتاب في التحليل الإنشائي للمنشآت المحددة أستاتيكا وبالتحديد الكمرات والإطارات والجمالونات ، حيث يتم شرحها باستفاضة ووضوح وتُلحق بعدد وفير من الأمثلة المحلولة.

ومع أن هذا الكتاب قد وضع أصلاً لطلبة السنة الأولي بقسم الهندسة المدنية ولكنه ممكن أن يكون عونا لطلاب كلية الهندسة في الفروع الهندسية الأخرى.

ويعبر المؤلفان عن عرفانهما لكل من المرحوم الأستاذ الدكتور/ محمد عبد الفتاح ديوان والمرحوم الأستاذ الدكتور/ أحمد فهمي عبد الرحمن لما لهما من فضل عظيم في تعليمهما أسس نظرية الإنشاءات.

كما يعبر المؤلفان عن جزيل شكرهما للمهندسة / دعاء الديب والمهندسة / إيمان عبد اللطيف لمساعدتهما في إخراج وطباعة هذا الكتاب.



بسم الله الرحمن الرحيم

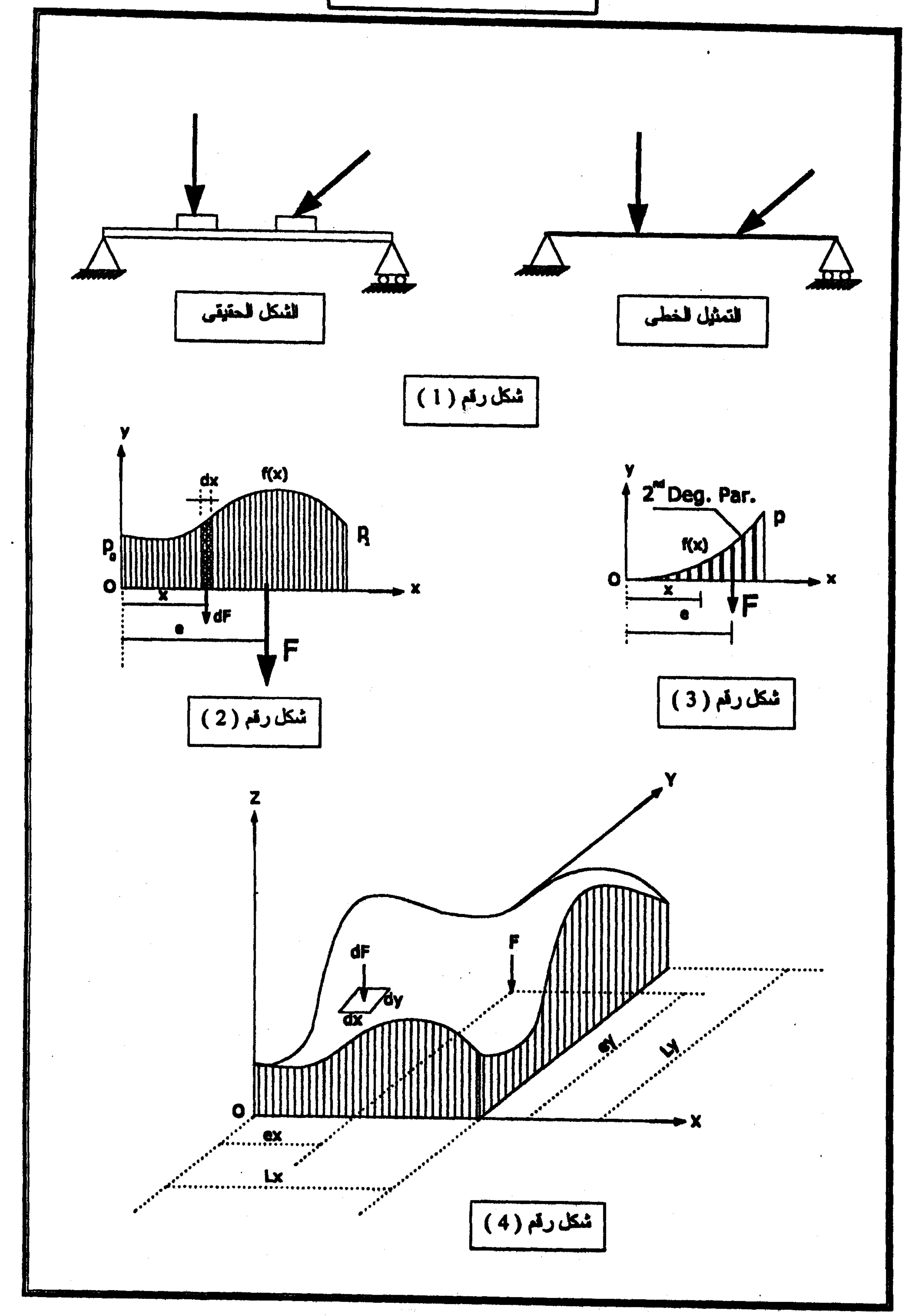
تهتم نظرية الانشاءات بايجاد القوى الداخلية فى المنشآت المختلفة و الناتجة من مؤثرات خارجية أو مؤثرات داخلية ، كما تهتم بايجاد التشكلات الناتجة عن تلك القوى ، وذلك لكى يتسنى لنا تصميم هذه المنشآت لكى تتحمل هذه القوى الداخلية بأمان كاف ودون اسراف فى المواد المكونة لهذه المنشآت حتى يصبح المنشأ اقتصادى وآمن فى نفس الوقت. وعموما يقصد بالمنشأ كل مادة صلبة (غير سائلة أو غير غازية) ، سواء أكان المنشأ فى البر أو فى البحر أو فى الجو ، مثل المبانى بجميع أنواعها و الكبارى و الأنفاق والسكك الحديدية و المطارات و الطرق و الأرصفة و الحوائط الساندة و القناطر و السحارات و الأهوسة و حواجز الأمواج و الآلات و الماكينات بجميع أنواعها و السفن والغواصات و حاملات الطائرات و الصواريخ و سفن الفضاء و الأقمار الصناعية و غيرها . و المقصود بالمؤثرات الخارجية أو الداخلية هى القوى التى تؤثر على المنشأ نتيجة للأحمال الخارجية بما فى ذلك وزن المنشأ نفسه أو القوى التى تتولد نتيجة للتغير فى درجات الحرارة أو لتعرض المنشأ للحركة سواء أكانت دورانية أو انتقالية بما فى ذلك دوران أو انتقال مواضع المنشأ و ذلك لأن هذه الحركة يتولد عنها قوى داخلية كبيرة قد تفوق بكثير القوى الداخلية الناتجة من الأحمال الخارجية ذاتها . و بقدر ما تكون دراسة المنشأ دقيقة ، بقدر ما تحقق له من وفر و أمان فى التصميم ، لذلك يأتى دائما التحليل الانشائى فى المقام الأول عند دراسة و تصميم أى منشأ مهما اختلف نوع المادة المستخدمة فى انشائه . و لكى يتم ذلك بدقة و سهولة و يسر ، لابد من معرفة جميع أنواع الأحمال التى تؤثر على أى منشأ و كذلك أنواع الركائز و أنواع المنشآت .

أولا : الأحمال (Loads)

ا – تقسم الأحمال من حيث نوعها الى : -

1. أحمال مركزة (Concentrated Loads) .
2. أحمال موزعة طبقا لدالة معينة (Distributed Loads) .

و الحمل المركز (نظريا) هو الذى يؤثر عند نقطة معينة و فى اتجاه معين كما بالشكل رقم (١) ، و ان كان هذا الأمر يصعب تحقيقه من الناحية العملية حيث أن أى حمل مركز لا يؤثر فى نقطة و انما يؤثر فى مساحة صغيرة حول مركز هذا الحمل ، و لكن هذه المساحة الصغيرة يمكن اهمالها؛ و على العكس من ذلك فان الحمل الموزع هو الذى لا يتركز تأثيره عند نقطة معينة و انما يمتد الى مساحة كبيرة من المنشأ . و يتم تمثيل الحمل المركز بسهم ، حيث يمثل اتجاه السهم اتجاه الحمل المركز ، و يمثل ميل السهم ميل الحمل المركز ؛ بينما يتم تمثيل الحمل الموزع برسم دالة هذا الحمل و يتم تظليل



الشكل الحقيقى
التمثيل الخطى
شكل رقم (1)
y
dx
f(x)
p_o
P_1
O
x
dF
e
F
شكل رقم (2)
y
2nd Deg. Par.
p
f(x)
O
x
e
F
شكل رقم (3)
Z
Y
dF
F
dy
dx
ey
Ly
O
X
ex
Lx
شكل رقم (4)

هذه الدالة بأسهم صغيرة تبين اتجاه تأثير هذا الحمل ، ليدل هذا التظليل على كثافة الحمل لوحدة الطول أو وحدة المساحة و ذلك حسب طبيعة المنشأ كأن نقول (p t/m) (p طن لكل متر طولى) و ذلك اذا كان المنشأ خطى مثل الكمرات و الاطارات و غيرها ؛ أو أن نقول ($p\ t/m^2$) (p طن لكل متر مربع) و ذلك اذا كان المنشأ مسطحا (قشريا) مثل الألواح و البلاطات و القشريات و القباب الى غير ذلك من المنشآت . و فى جميع الأحوال سواء أكانت الكثافة للمتر الطولى أو للمتر المربع ، فانه يتم استبدال هذا الحمل بحمل مركز مكافىء للحمل الموزع و يؤثر فى مركز ثقل هذا الحمل الموزع و ذلك على النحو التالى :-

١ – الحمل الموزع لكل متر طولى

لكى يتم تركيز هذا الحمل على شكل حمل مركز (F) و مركز ثقل هذا الحمل الموزع يبعد مسافة (e) عن بداية الحمل من ناحية اليسار كما هو موضح بالشكل رقم (٢) ، فان :

$$dF = f(x).dx$$

$$F = \int_0^L f(x).dx$$

وبأخذ العزوم حول أى نقطة و لتكن (O)

$$\int_0^L dF.x = F.e \quad \text{or} \quad e = \frac{\int_0^L dF.x}{F} = \frac{\int_0^L f(x).x.dx}{\int_0^L f(x).dx}$$

فمثلا اذا اعتبرنا حملا موزعا على شكل منحنى من الدرجة الثانية ، كما بالشكل رقم (٣) و يخضع للعلاقة التالية :

$$f(x) = p\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{p}{L^2}.x^2$$

فان :

$$F = \int_0^L \frac{p}{L^2}x^2\,dx = \frac{p}{L^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^L = \frac{p}{L^2}.\frac{L^3}{3} = \frac{p.L}{3}$$

$$\therefore e = \frac{\int_0^L f(x).x.dx}{\int_0^L f(x).dx} = \frac{\int_0^L \frac{p}{L^2}.x^2.x.dx}{\left(\frac{p.L}{3}\right)} = \frac{\frac{p}{L^2}.\int_0^L x^3.dx}{\left(\frac{p.L}{3}\right)} = \frac{\frac{p}{L^2}\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^L}{\left(\frac{p.L}{3}\right)} = \frac{\frac{p}{L^2}\left(\frac{L^4}{4}\right)}{\left(\frac{p.L}{3}\right)} = 0.75L$$

وهكذا ، والجدول رقم (١) يبين بعض نماذج الأحمال المألوفة و المستخدمة كثيرا ، وأى حمل غير موجود بهذا الجدول يمكن ايجاد الحمل المكافئ له ومكان تأثيره طبقا لما سبق .

جدول رقم (1)

Type	Shape	f(x)	e	F
Uniform	p, L	$f(x) = p$	$L/2$	$p.L$
Triangular	p, L	$f(x) = p.x/L$	$2L/3$	$p.L/2$
Sine Curve	2L/3.14, p, L	$f(x) = p.\sin(\pi x/2L)$	$2L/\pi$	$2p.L/\pi$
2^{nd} deg. par. type (1)	L/2, p, L	$f(x) = p(1-((L-x)/L)^2)$	$5L/8$	$(2/3).p.L$
2^{nd} deg. par. type (2)	p, L/2, L	$f(x) = p.(x/L)^2$	$0.75\ L$	$(1/3).p.L$
Trapezoid	P_1, P_2, L	$f(X) = P_1 + (P_2 - P_1).x/L$	$(L/3)((P_1 + 2P_2)/(P_1 + P_2))$	$0.5(p_1 + p_2).L$

٢ - الحمل الموزع لكل متر مربع ($p\ t/m^2$)

بنفس الطريقة السابقة ، يمكن ايجاد الحمل المكافئ ومكان تأثيره فى حالة الحمل الموزع لكل متر مربع انظر شكل رقم (٤) .

$$dF = f(x,y).dA$$

$$\therefore F = \int_0^A f(x,y).dA = \int_0^{Lx}\int_0^{Ly} f(x,y).dx.dy$$

$$ex = \frac{\int_0^{Lx}\int_0^{Ly} f(x,y).x.dx.dy}{F}, Similarily, ey = \frac{\int_0^{Lx}\int_0^{Ly} f(x,y).y.dx.dy}{F}$$

فمثلا اذا كانت $(f(x,y) = p)$ ، فان :-

$$F = \int_0^{Lx}\int_0^{Ly} p.dx.dy = \int_0^{Lx}\left(\int_0^{Ly} p.dy\right).dx = \int_0^{Lx}(p.y)_0^{Ly}.dx = p.Ly.\int_0^{Lx}dx = p.Ly.(x)_0^{Lx} = p.Lx.Ly$$

$$ex = \frac{\int_0^{Lx}\left(\int_0^{Ly} p.x.dy\right).dx}{F} = \frac{\int_0^{Lx}(p.y.x)_0^{Ly}.dx}{F} = \frac{\left(p.Ly.\frac{x^2}{2}\right)_0^{Lx}}{F} = \frac{p.Ly.\frac{(Lx)^2}{2}}{p.Lx.Ly} = \frac{Lx}{2},$$

$$Similarily, ey = \frac{Ly}{2}.$$

ب- وتقسم الأحمال أيضا تبعا لطبيعة عملها الى الآتى : -

١ – أحمال ثابتة (ميتة) **Dead Loads** .

٢- أحمال متحركة (حية) **Live or Moving Loads** .

٣ – أحمال ديناميكية **Dynamic Loads**.

و تعرف الأحمال الثابتة (الميتة) على أنها تلك الأحمال التى لا تتغير فى القيمة أو الوضع مثل وزن المنشأ (Own Weight) .

أما الأحمال المتحركة (الحية) فهى تلك الأحمال التى يتغير وضعها أو قيمتها على المنشأ ، مثل الأثاثات المتنقلة فى المنشأ أو الأفراد أو تأثير ضغط المياه أو التربة على الحوائط الساندة أو القوى الناشئة من التغير فى درجات الحرارة أو حركات الركائز .

و أما الأحمال الديناميكية فهى تعتبر من الأحمال المتحركة ولكن يصاحبها تأثير ديناميكى مثل الاهتزازات أو الصدمات أو الاحتكاكات و غيرها .

[illegible]

تعرف الركائز على أنها ما يرتكز عليها المنشأ و عندها تؤثر مركبات ردود الأفعال اللازمة لحدوث الاتزان فى المنشأ نتيجة ما يقع عليه من أحمال و مؤثرات خارجية ، كما تعتبر مواضع اتصال أى جزء من

المنشأ عند أطرافه ببقية المنشأ تعتبر ركائز لهذا الجزء عند دراسة ما يتولد فيه من قوى داخلية بوصفه جزءا مستقلا بذاته ، و فى معظم الأحوال تكون أماكن الركائز (مواضع الارتكاز) محددة بنقط معينة أى أن مركبات ردود الأفعال التى تحدث الاتزان تكون مركزة عند هذه النقط ، ومن ناحية أخرى فانه فى بعض المنشآت يكون الارتكاز ليس محددا بنقط معينة و انما يكون الارتكاز على مساحة معينة و يكون رد الفعل عبارة عن حمل موزع مثل المنشآت التى تسبح على سطح الماء أو تغوص فيه أو المنشآت التى تحلق فى الجو وفى تلك الحالات تنشأ قوى رد الفعل من ضغط المياه أو ضغط الهواء على الترتيب وفى هذه الحالات اذا تساوت القوى المؤثرة مع قوى ردود الأفعال حدث التوازن أو الحركة بسرعة ثابتة ، أما اذا اختلفت القوى المؤثرة عن القوى الناتجة من ردود الأفعال حدثت الحركة متغيرة السرعة زيادة أو نقصانا . و عموما فان المعنى العام لكلمة ركيزة هى منع الحركة كليا أو جزئيا عند مكان الارتكاز ، و الحركة المقصودة هنا تشمل الازاحة (translation) فى اتجاه ما أو الدوران (rotation) حول محور ما وبالتالى تتوقف مركبات ردود الفعل على شكل و نوع الركيزة ، بمعنى انه اذا منعت الحركة فى اتجاه ما سواء أكان هذا المنع كليا أو جزئيا استلزم هذا المنع رد فعل فى هذا الاتجاه و تعتمد قيمة رد الفعل على كيفية المنع (كليا أو جزئيا) ، أما اذا منع الدوران حول محور ما كليا أو جزئيا فان ذلك يستلزم عزم ازدواج يؤثر على المنشأ عند مكان رد الفعل ، و تعتمد قيمة عزم الازدواج على كيفية المنع (كليا أو جزئيا) ، و فيما يلى بعض نماذج من أنواع الركائز شائعة الاستعمال .

١- ركيزة تامة التثبيت (Totally Fixed Support) ، شكل رقم (٥ – أ) .

و هذا النوع من الركائز لايسمح بالانتقال أفقيا ($\delta_x = 0.0$) و لا رأسيا ($\delta_y = 0.0$) و لا دورانيا ($\phi_z = 0$) و بالتالى تتولد ثلاث مركبات لردود الفعل و هى (R_x , R_y , M) و قد تنعدم احدى هذه المركبات و تصبح مساوية للصفر فى حالة وضع احمال معينة ، كأن تكون الأحمال رأسية فقط و عندئذ تكون ($R_x = 0.0$) وهكذا .

٢- ركيزة مفصلية مثبتة (Hinged Support) ، شكل رقم (٥ – ب) .

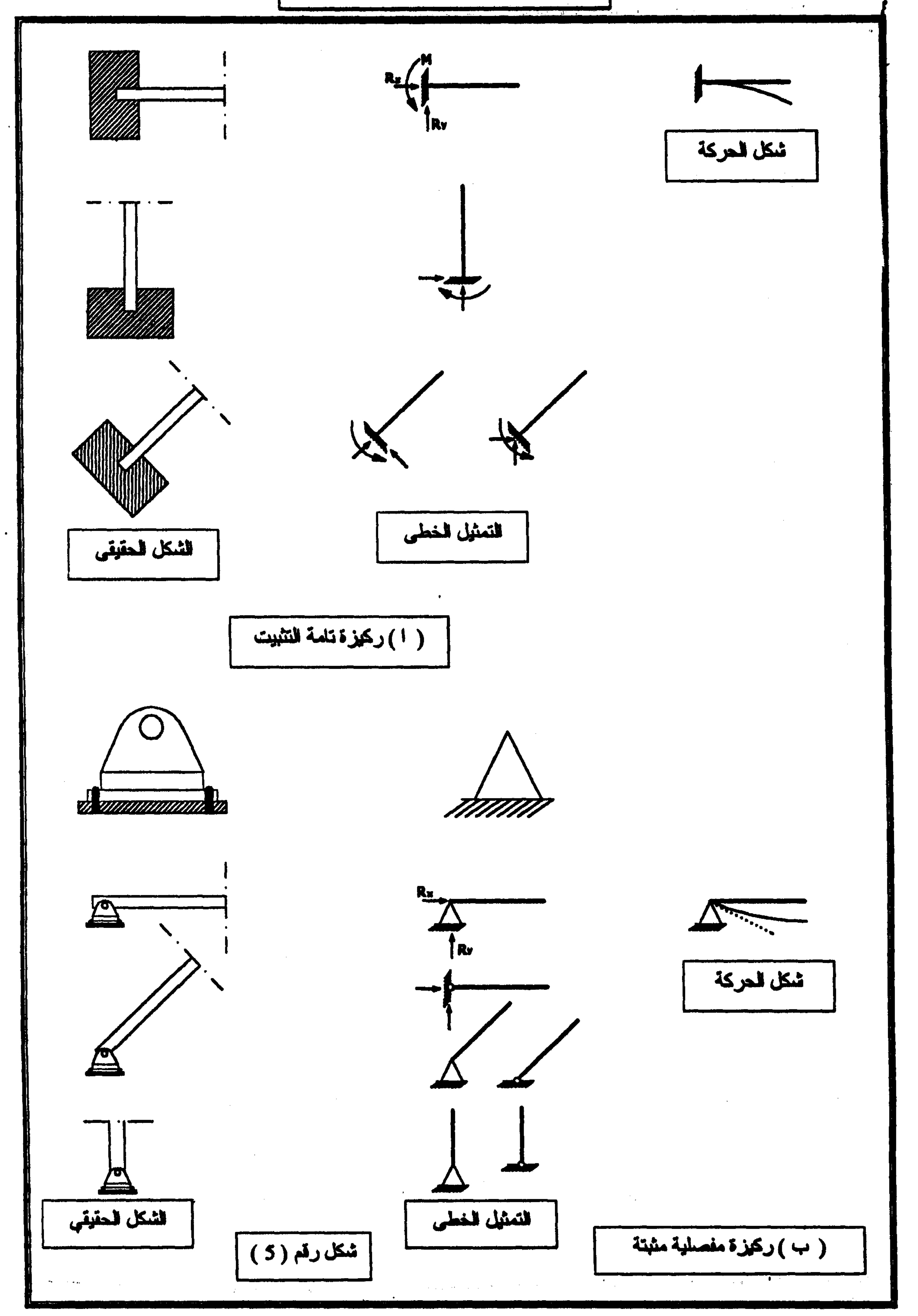
وهذا النوع من الركائز يسمح بالدوران فقط ولا يسمح بالحركة الانتقالية فى أى اتجاه ($\delta_x = 0.0$, $\delta_y = 0.$) و بالتالى تتولد مركبتا ردى الفعل (R_x , R_y) و ينعدم عزم التثبيت ($M = 0.0$) .

٣- ركيزة مفصلية متحركة (Movable or Roller Support) ، شكل رقم (٥ – ج) .

وهذا النوع من الركائز يسمح بالدوران و الحركة فى اتجاه ما و يمنع بالتالى الحركة فى الاتجاه العمودى على هذا الاتجاه ، وبالتالى تتولد مركبة واحدة لرد الفعل و يكون اتجاهها عموديا على اتجاه الحركة .

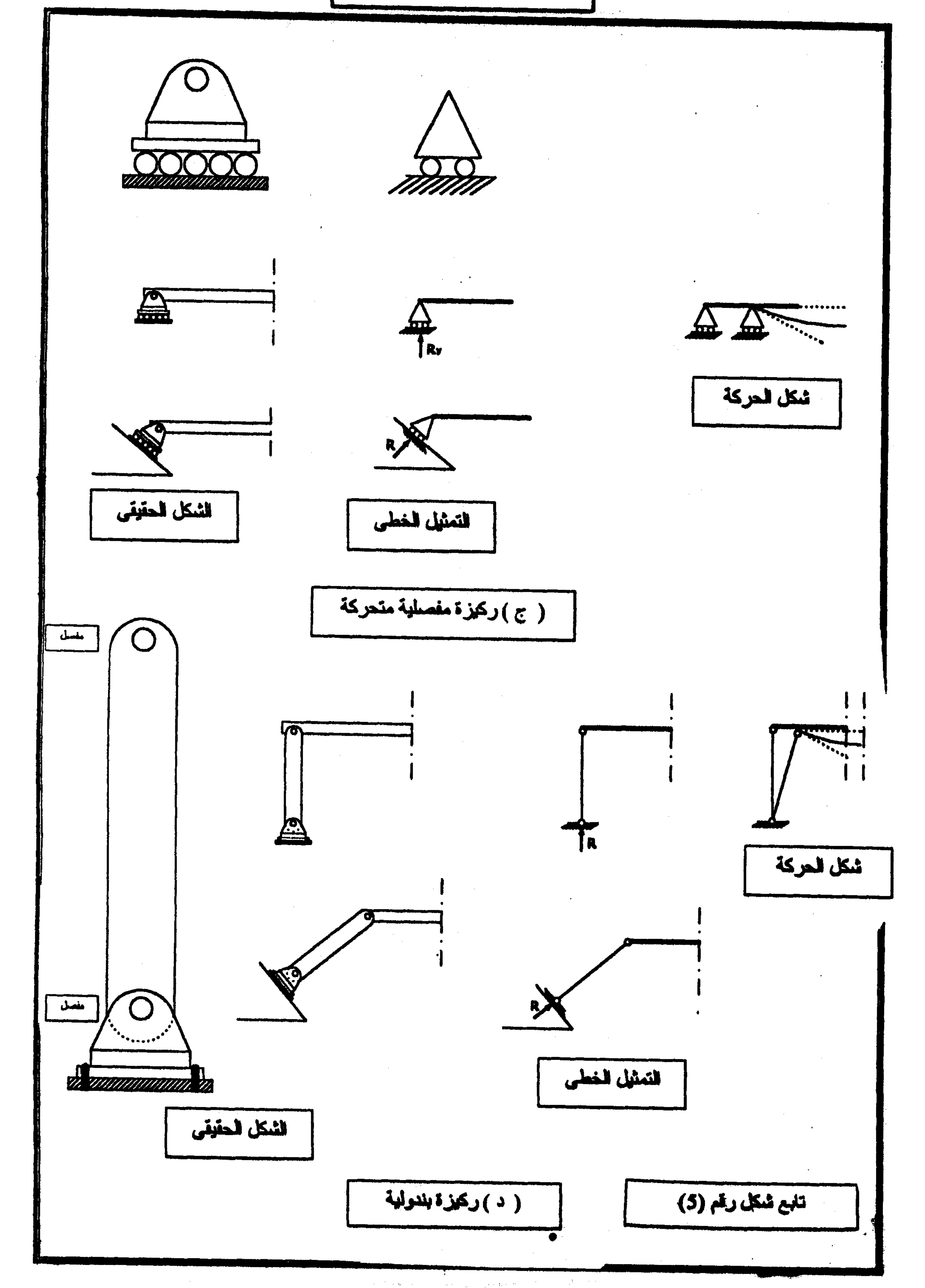
٤- ركيزة بندولية (Pendulum Support) ، شكل رقم (٥ – د) .

وهذا النوع من الركائز عبارة عن جسم مستقيم مفصلى النهايتين كما هو موضح بالشكل ، و هذا النوع يسمح بالدوران عند نهايتيه و كذلك يسمح بالحركة فى اتجاه عمودى على الخط الواصل بين المفصلين و بالتالى يتولد رد فعل واحد فقط فى اتجاه الخط الواصل بين المفصلين .



M
Rx
Ry
شكل الحركة
الشكل الحقيقى
التمثيل الخطى
(ا) ركيزة تامة التثبيت
Rx
Ry
شكل الحركة
الشكل الحقيقي
التمثيل الخطى
(ب) ركيزة مفصلية مثبتة

شكل رقم (5)


Rv
R
شكل الحركة
الشكل الحقيقى
التمثيل الخطى
(ج) ركيزة مفصلية متحركة
مفصل
مفصل
R
شكل الحركة
R
التمثيل الخطى
الشكل الحقيقى
(د) ركيزة بندولية
تابع شكل رقم (5)

٥- ركيزة مرنة أو زنبركية (Elastic or Spring Support) ، شكل رقم (٥ - هـ) .

وهذا النوع من الركائز يمنع الحركة جزئيا سواء أكانت حركة انتالية أو دورانية وبالتالى يتولد رد فعل فى اتجاه الزنبرك فى حالة الحركة الانتقالية ، و عزم انحناء فى حالة الحركة الدورانية ، و تعتمد قيمة رد الفعل أو العزم على جساءة الزنبرك (Spring Stiffness) ، و يوجد هذا النوع من الركائز فى المنشآت المتحركة (العربات و القطارات و.... الخ) ، أو المنشآت المعرضة للاهتزازات و ذلك حتى يمتص الصدمات .

٦- ركيزة موجهة (Guided Support) ، شكل رقم (٥ - و) .

وهذا النوع من الركائز يسمح بالحركة الانتقالية فى اتجاه ما ولكنه لايسمح بالحركة الانتقالية فى الاتجاه العمودى على اتجاه الحركة ، كما لايسمح بالدوران .

[illegible]

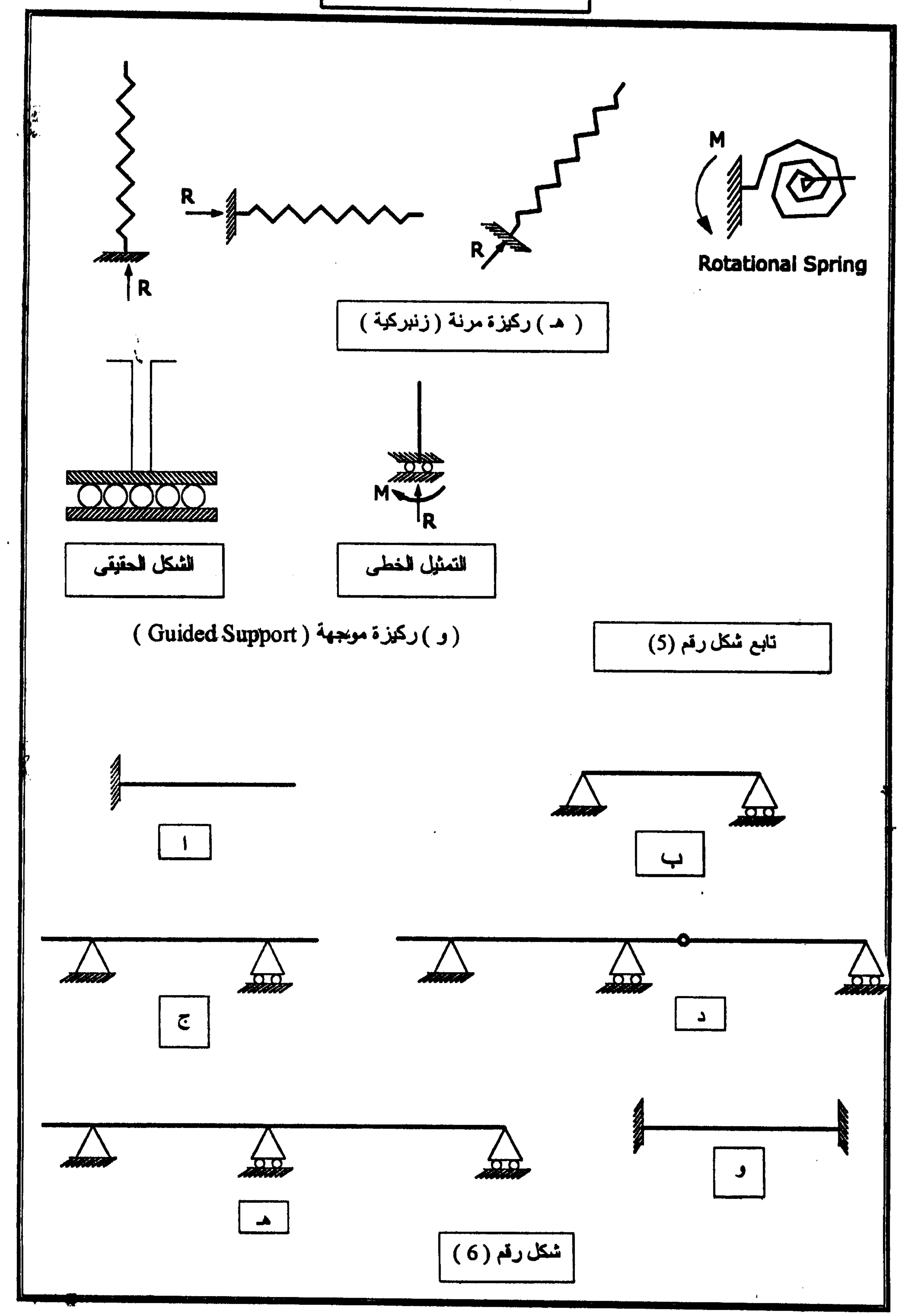
تنقسم المنشآت الى نوعين اساسيين و هما :-

- [illegible] (Linear Structures)
- [illegible] (Surface Shell Structures)

والنوع الأول من المنشآت هو ما تولد من حركة مساحة معينة عموديا على خط معلوم بحيث يمر هذا الخط دائما بمركز هذه المساحة و يمثل هذا الخط محور الانشاء ، وتمثل المساحة شكل القطاع العمودى (Cross-Section) و هذا المحور قد يكون خطا مستقيما (أفقيا أو مائلا أو مضلعا) أو قد يكون خطا منحنيا كما أن المساحة الممثلة للقطاع قد تظل ثابتة أو قد تتغير فى الشكل ، و فى الحالة الأولى يكون قطاع المنشأ ثابت ويكون متغيرا فى الحالة الثانية ، وعلى هذا تنقسم المنشآت الخطية الى الأنواع الآتية و ذلك حسب شكل محورها وطريقة ارتكازها :-

[illegible] (Beams) [illegible] وتعرف الكمرات بأنها تلك المنشآت ذات المحور المستقيم ، شكل رقم (٦) ، وهى تنقسم الى :-

- الكمرة الكابولى (Cantilever Beam) ، شكل رقم (٦ – ا) .
- الكمرة البسيطة (Simple Beam) ، شكل رقم (٦ – ب) .
- الكمرة ذات الأطراف الممتدة أو المعلقة (Beam with over Hanging Ends) ، شكل (٦- ج) .
- الكمرات المفصلية المركبة (Compound Beams) ، شكل رقم (٦ – د) .
  وهى كمرات ذات اتصال مفصلى من الداخل عند قطاع أو أكثر .
- الكمرات المستمرة (Continuous Beams) ، شكل رقم (٦ – هـ) .
  وهى الكمرات التى ترتكز على أكثر من ركيزتين مفصليتين .
- الكمرات المثبتة (Fixed Beams) ، شكل رقم (٦ – و) .


R
R
R
M
Rotational Spring
(هـ) ركيزة مرنة (زنبركية)
M
R
الشكل الحقيقى
التمثيل الخطى
(و) ركيزة موجهة (Guided Support)
تابع شكل رقم (5)
ا
ب
ج
د
هـ
و
شكل رقم (6)

و عندما يكون محور الكمرات أفقيا تسمى الكمرات فى هذه الحالة ، كمرات أفقية ، وعندما يكون محور الكمرات مائلا تسمى الكمرات فى هذه الحالة ، كمرات مائلة .

[illegible] ، وتعرف الاطارات بأنها تلك المنشآت التى يكون محورها مضلعا (Polygonal) ، شكل رقم (٧) ، ونذكر منها على سبيل المثال لا الحصر :-

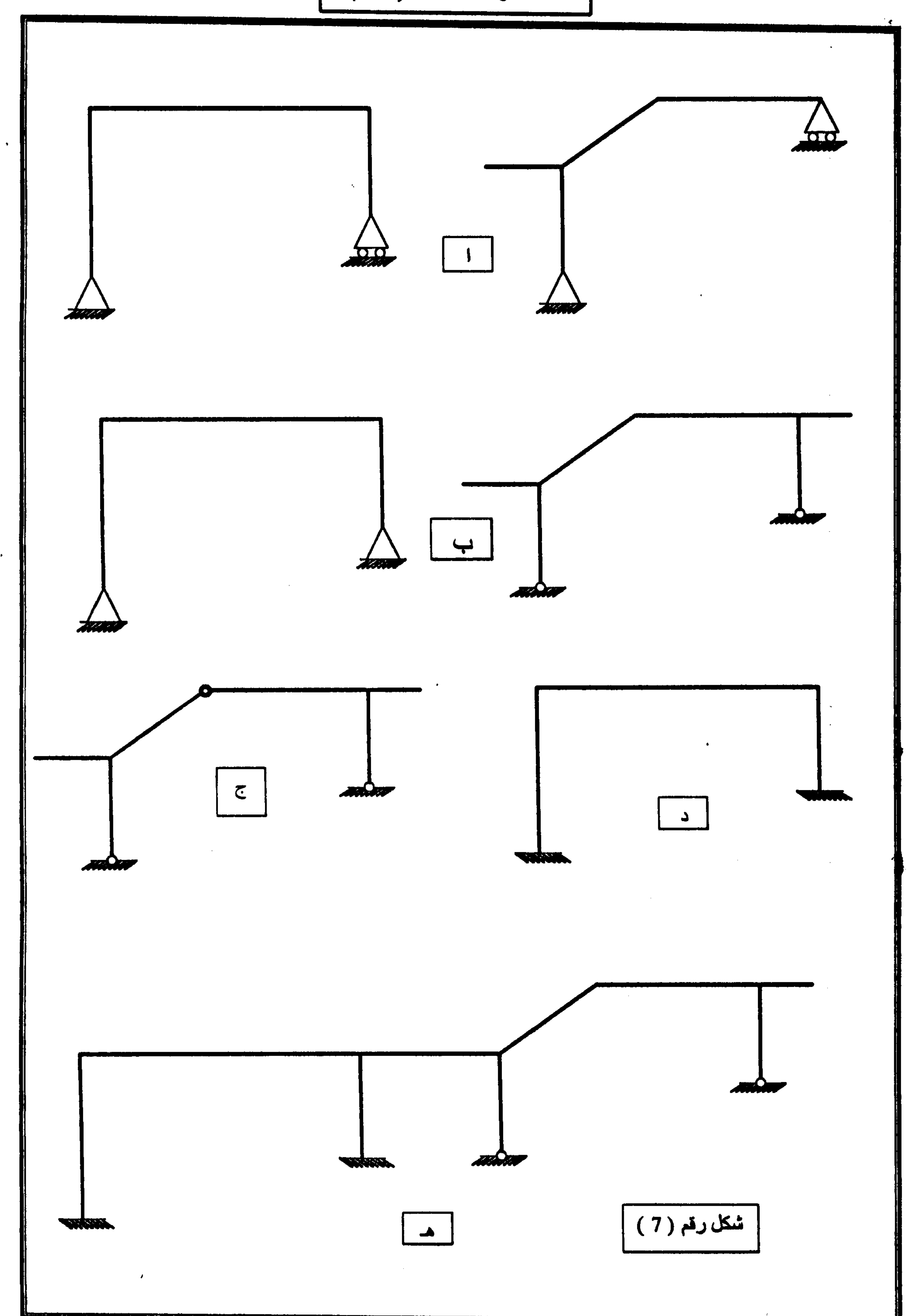
- الاطارات البسيطة (Simple Frames) ، وهى ما ارتكزت على ركائز بسيطة ، شكل (٧ – ا) .
- الاطارات ثنائية المفاصل (Two Hinged Frames) ، وهى التى تحتوى على مفصلين ، شكل رقم (٧ – ب) .
- الاطارات ثلاثية المفاصل (Three Hinged Frames) ، شكل رقم (٧ – ج) .
- الاطارات المثبتة (Fixed Frames) ، شكل رقم (٧ – د) .
- الاطارات المستمرة (Continuous Frames) ، شكل رقم (٧ – هـ) .
- الاطارات متعددة الطوابق (Multi-Story Frames) ، شكل رقم (٧ – و) .

[illegible] ، و تعرف بأنها تلك المنشآت التى يكون فيها المحور منحنيا و يشترط ألا يسمح بالحركة الانتقالية عند أماكن ارتكازها ، وذلك بأن تكون ركائزها من النوع تام التثبيت أو النوع المفصلى الثابت ، شكل رقم (٨) ؛ فاذا كانت احدى الركائز من النوع البسيط المتحرك أصبح المنشأ نوعا خاصا من الكمرات وهو الكمرات ذات المحور المنحنى ، ونذكر من العقود الأنواع الآتية :-

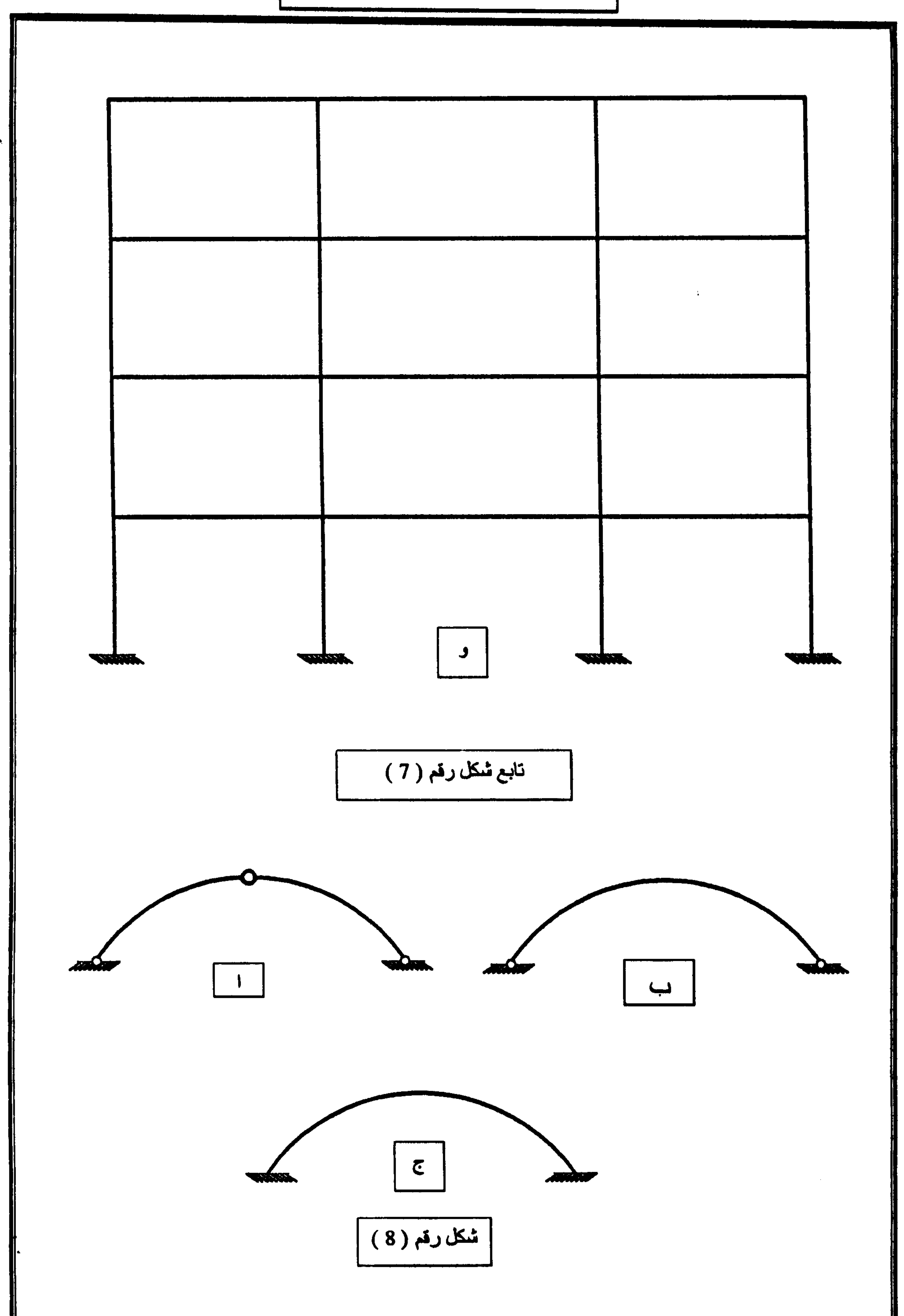
- العقد ثلاثى المفاصل (Three Hinged Arch) ، شكل رقم (٨ – ا) .
- العقد ثنائى المفاصل (Two Hinged Arch) ، شكل رقم (٨ – ب) .
- العقد المثبت (Fixed Arch) ، شكل رقم (٨ – ج) .
- العقد المستمر (Continuous Arch) ، شكل رقم (٨ – د) .

[illegible] ، ويتكون المنشأ فى هذه الحالة من مجموعة من القضبان تتصل ببعضها اتصالا مفصليا حتى تبدوا و كأنها غزل شبكى مفصلى (Hinged Net Work) ، شكل رقم (٩) ولها أقسام عديدة وذلك حسب شكل الارتكاز وذلك على النحو التالى :-

- الشبكيات البسيطة (Simple Trusses) ، شكل رقم (٩ – ا) .
- الشبكيات ثلاثية المفاصل (Three -Hinged Trusses) ، شكل رقم (٩ – ب) .
- الشبكيات المركبة (Compound Trusses) ، شكل رقم (٩ – ج) .
- الشبكيات المجزأة ثانويا (Subdevided Trusses) ، شكل رقم (٩ – د) .

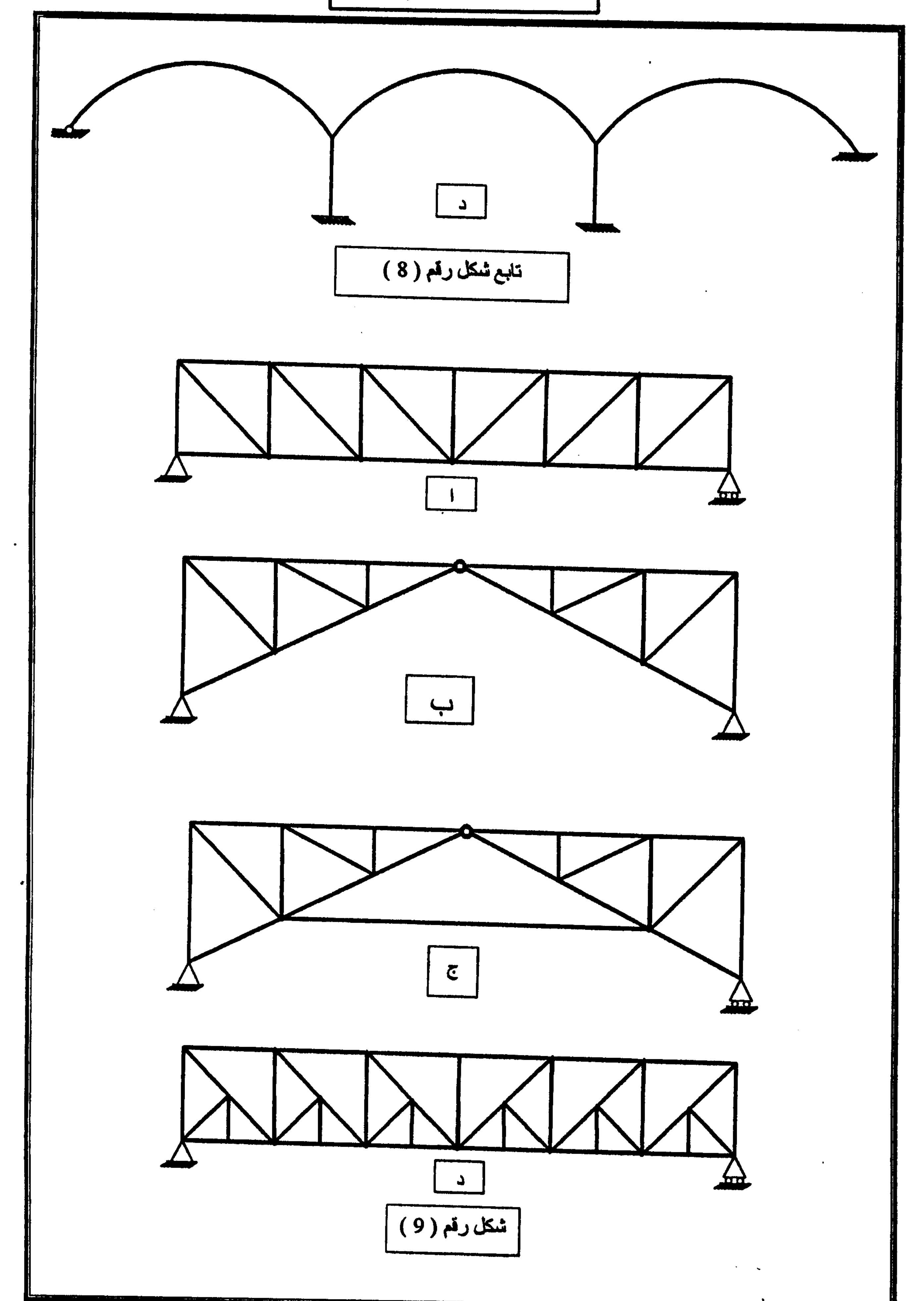


شكل رقم (7)



تابع شكل رقم (7)

شكل رقم (8)



تابع شكل رقم (8)

شكل رقم (9)

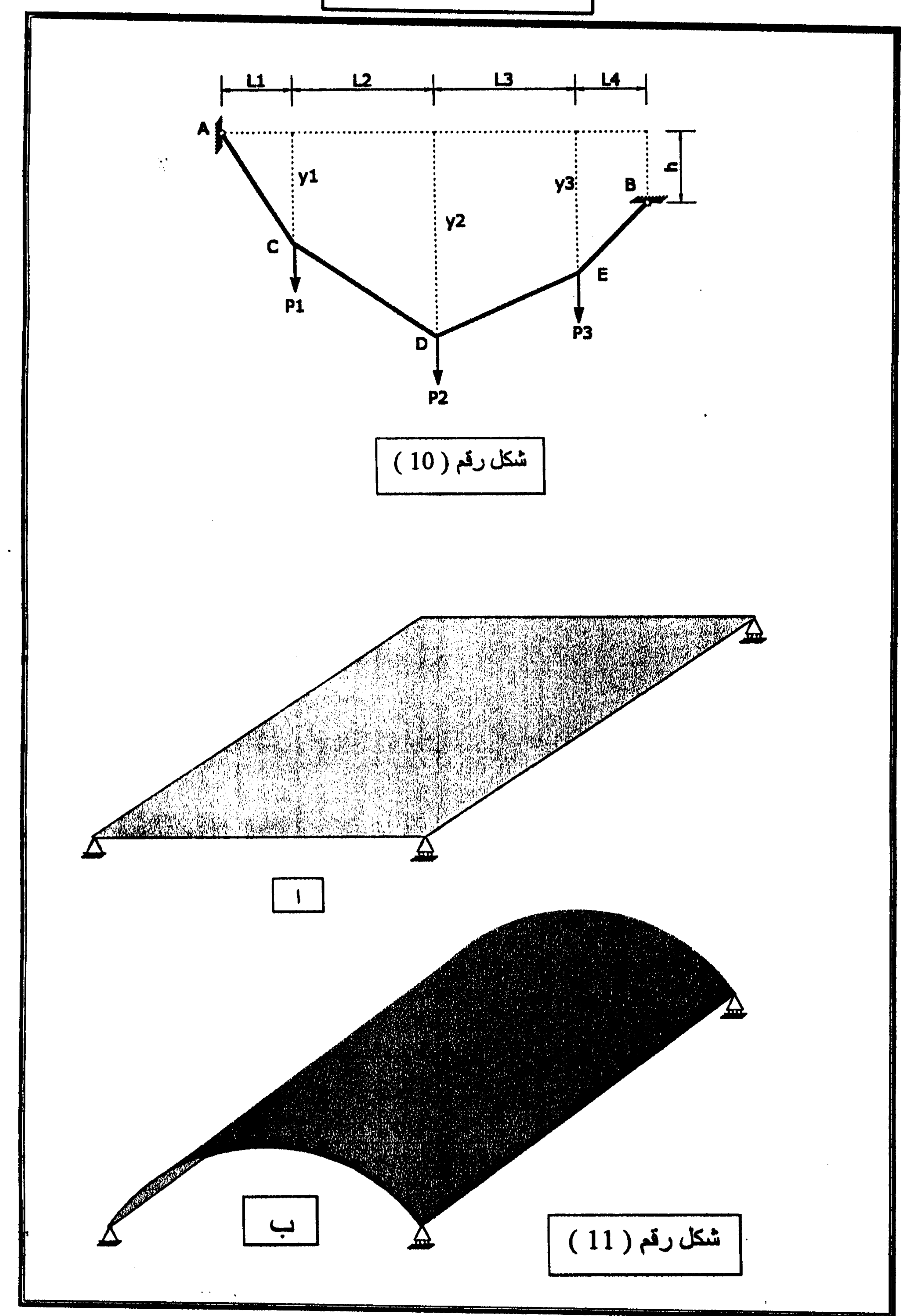
٥- الكابلات (الحبال) (Cables).

تعتبر الكابلات (الحبال) من المنشآت الهندسية الهامة حيث أنها تنقل الأحمال من عضو الى آخر ، وأهم استخدامات الكابلات هى أنها العنصر الأساسى فى الكبارى المعلقة (Suspension Bridges) ، وأوناش الرفع والبكرات وغيرها . وعند دراسة الكابلات يتم اهمال وزن الكابل فى معظم الأحوال وذلك اذا كانت الأحمال التى ينقلها كبيرة بالمقارنة بوزن الكابل ، وذلك فى حالات الكبارى المعلقة والأوناش وبكرات الرفع ، وفى قليل من الأحوال يتم اعتبار وزن الكابل وخصوصا اذا كان الكابل ينقل أحمالا صغيرة ، مثل تثبيت أبراج تقوية الارسال . وعند دراسة الكابلات يفترض أن الكابل تام المرونة (Perfectly Flexible) وفى نفس الوقت غير قابل للاستطالة (Inextensible) ، ولذلك يعامل الكابل على أنه لايتحمل أية مقاومة للعزوم فى جميع نقاطه وبالتالى يكون العزم مساويا للصفر عند أى موضع فى الكابل ، كما يعامل على أنه جسم متماسك (Rigid Body) . وسوف نكتفى بدراسة الكابل المعرض لأحمال مركزة فقط ؛ مع اهمال وزن الكابل ؛ فى هذه الحالة يكون شكل الكابل على هيئة مضلع مكون من مجموعة من الأجزاء المستقيمة بحيث يكون التقاء كل جزءين عند كل حمل مركز كما بالشكل رقم (١٠) .

فى هذا النوع من المنشآت ، تكون المسافات (L1, L2, L3, L4) بين الأحمال المركزة (P1, P2, P3) معلومة وكذلك طول الكابل ويكون المطلوب ايجاد ردود الأفعال عند أماكن تعليق الكابل وكذلك القوى فى جميع أجزاء الكابل وترخيم الكابل (Sags) عند مواضع الأحمال المركزة . وأحيانا يعطى الترخيم (Sags) عند بعض النقاط – بديلا عن طول الكابل – ويكون المطلوب ايجاد الترخيم (Sags) عند بقية النقاط ، بالاضافة الى ايجاد ردود الأفعال الخارجية وكذلك القوى فى جميع أجزاء الكابل .

النوع الثانى من المنشآت وهو المنشآت ذات الأسطح القشرية ، وهى تلك المنشآت التى لاينطبق عليها التعريف السابق للمنشآت الخطية ، شكل رقم (١١) ، وهى تتكون اساسا من أسطح رقيقة نسبيا وتقسم الى الأنواع الآتية :-

- الألواح والبلاطات (Plates and Slabs) ، وهى عبارة عن أسطح مستوية مثل الأسقف ، شكل رقم (١١ – ا) .
- القشريات (Shells) ، وهى أسطح مقوسة فى اتجاه واحد (Single Curved Surfaces) ، مثل الأسطوانة ويكون المحور الطولى للأسطوانة هو محور المنشأ القشرى وتكون جميع الرواسم موازية لهذا المحور ، شكل رقم (١١ – ب) .
- القباب (Domes) ، وهى عبارة عن منشآت ذات أسطح مقوسة فى اتجاهين (Double Curved Surfaces) ، ويمكن أن نتصور أن هذه المنشآت تنتج من دوران منحنى معين حول خط فى مستواه ويمثل هذا الخط محور القبة ويكون عادة رأسيا ، شكل رقم (١١ – ج) .



شكل رقم (10)

شكل رقم (11)

كما يمكن تقسيم النوعين السابقين من المنشآت – المنشآت الخطية والمنشآت ذات الأسطح القشرية – الى نوعين آخرين وهما منشآت مستوية (Plane Structures) ، ومنشآت فراغية – ثلاثية الأبعاد – (Space Structures) .

ومن ناحية أخرى يمكن أن تقسم جميع المنشآت السابقة الى النوعين الآتيين : -

١-منشآت محددة إستاتيكيا (Statically Determinate Structures) .

٢-منشآت غير محددة استاتيكيا (Statically Indeterminate Structures) .

والنوع الأول من هذه المنشآت ، هى تلك المنشآت التى يمكن تحديد جميع ردود الأفعال الخارجية أو القوى الداخلية لها وذلك باستخدام شروط الاتزان الاستاتيكى فقط (Condition of Static Equilibrium) ودون الاستعانة بأى شروط أخرى . أما النوع الثانى من هذه المنشآت وهى المنشآت غير المحددة استاتيكيا فهى تلك المنشآت التى لايمكن ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية أو القوى الداخلية باستخدام شروط الاتزان الاستاتيكى فقط ، بل يلزم ايجاد شروط أخرى اضافية وذلك لأن مركبات ردود الفعل أو القوى الداخلية تكون أكبر من عدد شروط الاتزان الاستاتيكى ، ويسمى الفرق بين عدد ردود الأفعال الكلية وعدد شروط الاتزان بردود الأفعال الزائدة وتكون درجة عدم التحدد مساوية لردود الأفعال الزائدة .

فمثلا اذا كانت ردود الفعل المجهولة = ٤ ، وكان عدد شروط الاتزان الاستاتيكى = ٣ ، فان عدد ردود الفعل الزائدة = ٤-٣ = ١ ، أى أن هذا المنشأ يعتبر غير محدد من الدرجة الأولى وهكذا ؛ ويمكن ايجاد درجة عدم التحدد لأى منشأ من العلاقة الآتية : -

درجة عدم التحدد = عدد مركبات ردود الفعل الزائدة = عدد مركبات ردود الفعل المجهولة – عدد معادلات شروط الاتزان الاستاتيكى .

وقد تكون مركبات ردود الفعل المجهولة فى الركائز الخارجية أو فى داخل المنشأ أو هما معا ، وتسمى المنشآت فى هذه الحالة بالترتيب هى منشآت غير محددة خارجيا أو داخليا أو هما معا ، وعلى هذا تكون درجة عدم التحدد الكلية = درجة عدم التحدد الخارجية + درجة عدم التحدد الداخلية .

الصورة العامة لايجاد درجة عدم التحدد الكلية لأى منشأ هى :

$$D = De + Di = (i.m + r) - (e.j + h)$$

حيث

(D) = درجة عدم التحدد الكلية .

(De) = درجة عدم التحدد الخارجية وتحدد من العلاقة التالية :-

$$De = r - EE$$

(EE) = عدد معادلات الاتزان .

(Di) = درجة عدم التحدد الداخلية وهى تساوى الفرق بين درجة عدم التحدد الكلية ودرجة عدم التحدد الخارجية ، كما أنه يمكن ايجاد درجة عدم التحدد الداخلية بطريقة أسرع على النحو التالى :-

فى حالة الاطارات متعددة الفتحات أو الطوابق تكون درجة عدم التحدد الداخلية مساوية لعدد الفتحات (البواكى) المغلقة مضروبا فى ٣ ويطرح منه عدد المفاصل الداخلية ان وجدت . وفى حالة الشبكيات تكون درجة عدم التحدد الداخلية مساوية لعدد الأعضاء الزائدة عن التركيب الشبكى البسيط .

(i) = عدد مؤثرات الاجهاد الداخلى فى عضو الانشاء – تساوى ٣ فى حالة عضو اطارى وتساوى ١ فى حالة عضو شبكى .

(m) = عدد الأعضاء المكونة للمنشأ .

(r) = عدد ردود الأفعال الخارجية المجهولة وتحدد من العلاقة التالية :-

$$r = 3F + 2H + R$$

(F) = عدد الركائز المثبة تثبيتا تاما .

(H) = عدد الركائز المفصلية المثبتة .

(R) = عدد الركائز المفصلية المتحركة .

(e) = عدد معادلات الاتزان عند أى وصلة من وصلات المنشأ – تساوى ٣ فى حالة الوصلة الاطارية وتساوى ٢ فى حالة الوصلة الشبكية .

(j) = عدد الوصلات المكونة للمنشأ .

(h) = عدد المفاصل الداخلية الموجودة فى المنشأ .

وعموما درجة عدم التحدد فى حالة الاطارات (Frames) هى : -

$$D = De + Di = (3m + r) - (3j + h)$$

ودرجة عدم التحدد فى الشبكيات (Trusses) هى : -

$$D = De + Di = (m + r) - 2j$$

والشكل رقم (١٢) يوضح بعض الأمثلة على كيفية تطبيق المعادلات السابقة فى ايجاد درجة عدم التحدد .

وجدير بالذكر أنه قد تظهر حالة من المنشآت يكون عدد مركبات ردود الفعل المجهولة فى جزء من المنشأ أو فى كامل المنشأ أقل من عدد معادلات شروط الاتزان ، فى هذه الحالة تسمى هذه المنشآت منشآت غير مستقرة (أو منهارة) – (Unstable) - فى أجزاء من المنشأ أو فى كامل المنشأ وسوف نعرض بالتفصيل كل هذه الحالات ، بعد أن نتعرف على معادلات شروط الاتزان .

<u>معادلات شروط الاتزان</u>

١. مجموع المركبات الأفقية للقوى المؤثرة = صفرا ($\Sigma X = 0.0$) .

٢. مجموع المركبات الرأسية للقوى المؤثرة = صفرا ($\Sigma Y = 0.0$) .

٣. مجموع عزوم القوى المؤثرة حول أى نقطة = صفرا ($\Sigma M = 0.0$) .

كما يمكن أن تتحقق شروط الاتزان الثلاثة السابقة فى صورة عزوم وذلك على النحو التالى :-

٤- مجموع عزوم القوى المؤثرة حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة = صفرا .

وغالبا ما نستخدم الشرط الأخير فى ايجاد مركبات ردود الأفعال المجهولة ، ونستخدم شرطى مركبات القوى الأفقية والرأسية للتأكد من صحة النتائج التى تم الحصول عليها من الشرط الرابع وهو ما نسميه (Checking) .

<u>المنشآت غير المستقرة جزئيا أو كليا وذلك خارجيا أو داخليا</u>

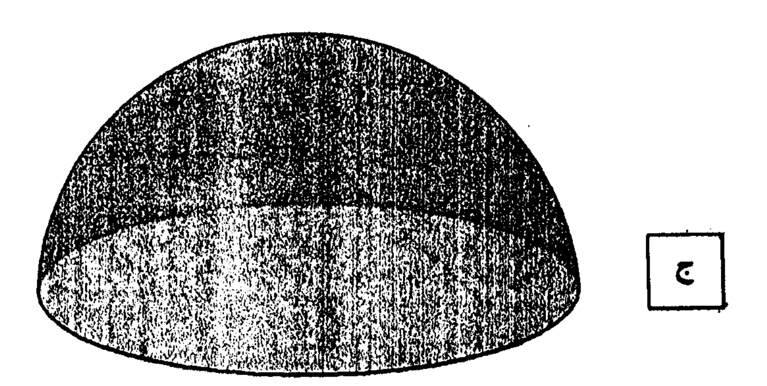
<u>أولا المنشآت غير المستقرة خارجيا</u>

قد يكون المنشأ مستقر فى ذاته ولكن طريقة اختيار الركائز الخارجية غير مناسب ، فى هذه الحالة يصبح المنشأ غير مستقر خارجيا وفيما يلى بعض الأمثلة على ذلك :-

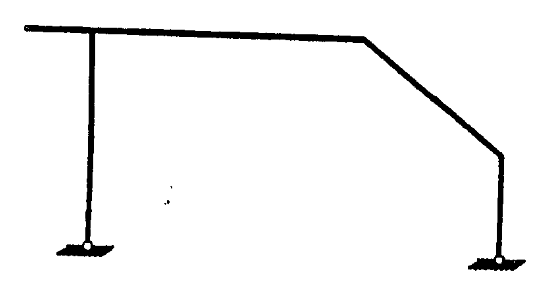
- **تلاقى مركبات ردود الأفعال الخارجية فى نقطة بعيدة عن نقطة تأثير محصلة الأحمال المؤثرة على المنشأ ، شكل رقم (١٣ – ا).**
- **عدم توازى مركبات ردود الأفعال الثلاثة ، شكل رقم (١٣ – ب) .**
- **عدد مركبات ردود الفعل أقل من عدد معادلات الاتزان ، شكل رقم (١٣ – ج) .**

<u>ثانيا المنشآت غير المستقرة داخليا</u>

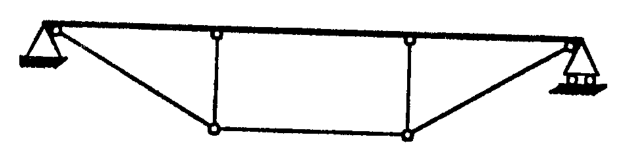
قد يكون المنشأ مستقرا خارجيا (حيث عدد ردود الأفعال الخارجية أكبر من أو يساوى عدد معادلات الاتزان) ، ولكن غير مستقر فى بعض أجزائه الداخلية ويحدث ذلك فى حالة زيادة معادلات الاتزان عن عدد مؤثرات الاجهاد الداخلى المجهولة ، فمثلا اذا كان لدينا اطارا مغلقا وكان هذا الاطار مرتكزا خارجيا على ركائز بسيطة ويوجد به أكثر من ثلاثة مفاصل(أربعة مفاصل مثلا) ، كما هو موضح بالشكل رقم (١٣ – د) ؛ فى هذه الحالة نلاحظ أن عدد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند أى قطاع يساوى ثلاثة (قوة عمودية وقوة قص وعزم انحناء) ولكن عدد معادلات الاتزان يساوى أربعة وهو يساوى عدد المفاصل ، عندئذ نقول أن هذا الاطار غير مستقر داخليا .



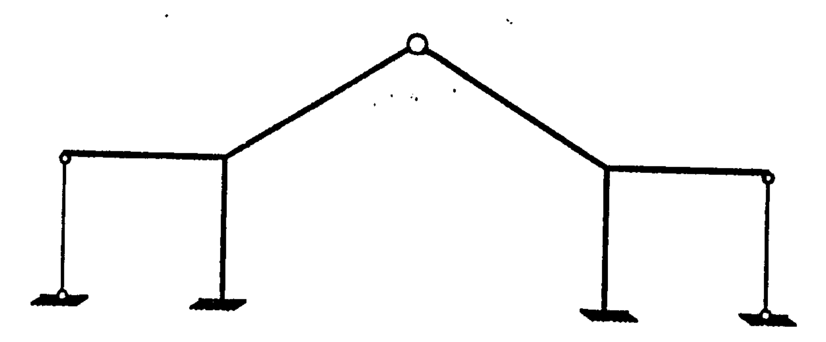
تابع شكل رقم (11)



m = 5 , j = 6 , r = 4 , h = 0
D = (3*5 +4) - (3*6) = 19 - 18 = 1
De = r - EE = 4 - 3 = 1 , DI = D - De = 0



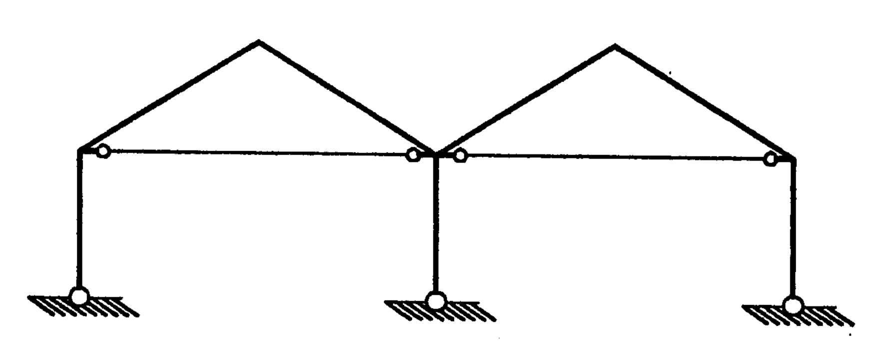
m = 8 = 3 (Frame Member) + 5 (Truss - Member)
j = 6 = 4 (Frame Joint) + 2 (Truss- Joint)
r = 3 , h = 0
D = (3*3 + 1*5 + 3) - (3*4 + 2*2 + 0) = 17 - 16 = 1
De = r - EE = 3 - 3 = 0
DI = D - De = 1 - 0 = 1



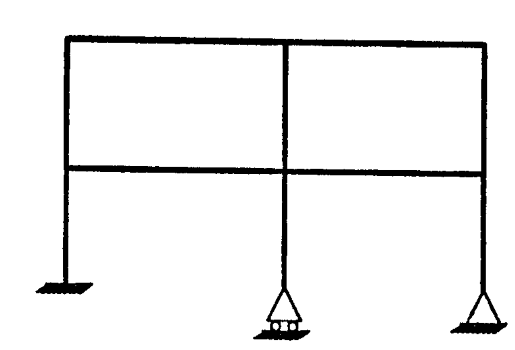
m = 8 = 6 (Frame Element) + 2 (Truss - Element)

j = 9 , r = 10 , h = 3 (in case of m = 8) ,
h = 1 (in case m = 6 + 2)
D = (3*8 + 10) - (3*9 + 3) = 34 - 30 = 4
OR D = (3*6 + 1*2 +10) - (3*7 + 2*2 + 1) = 30 - 26 = 4
De = r - EE = 10 - 6 = 4 , DI = D - De = 4 - 4 = 0

شكل رقم (12)

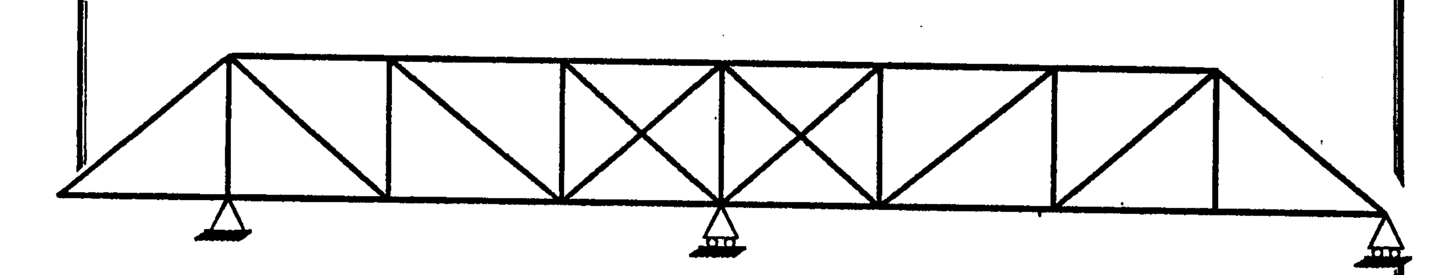


m = 9 = 7(Frame Member) + 2 (Truss-Member)
j = 8 , r = 6 , h = 4 (In case of m = 9) ,
h = 0 (In case of m = 7 + 2)
D = (3*9 +6) - (3*8 + 4) = 33 - 28 = 5
OR , D = (3*7 +1*2 + 6) - (3*8) = 29 - 24 = 5
De = r - EE = 6 - 3 = 3
Di = D - De = 5 - 3 = 2



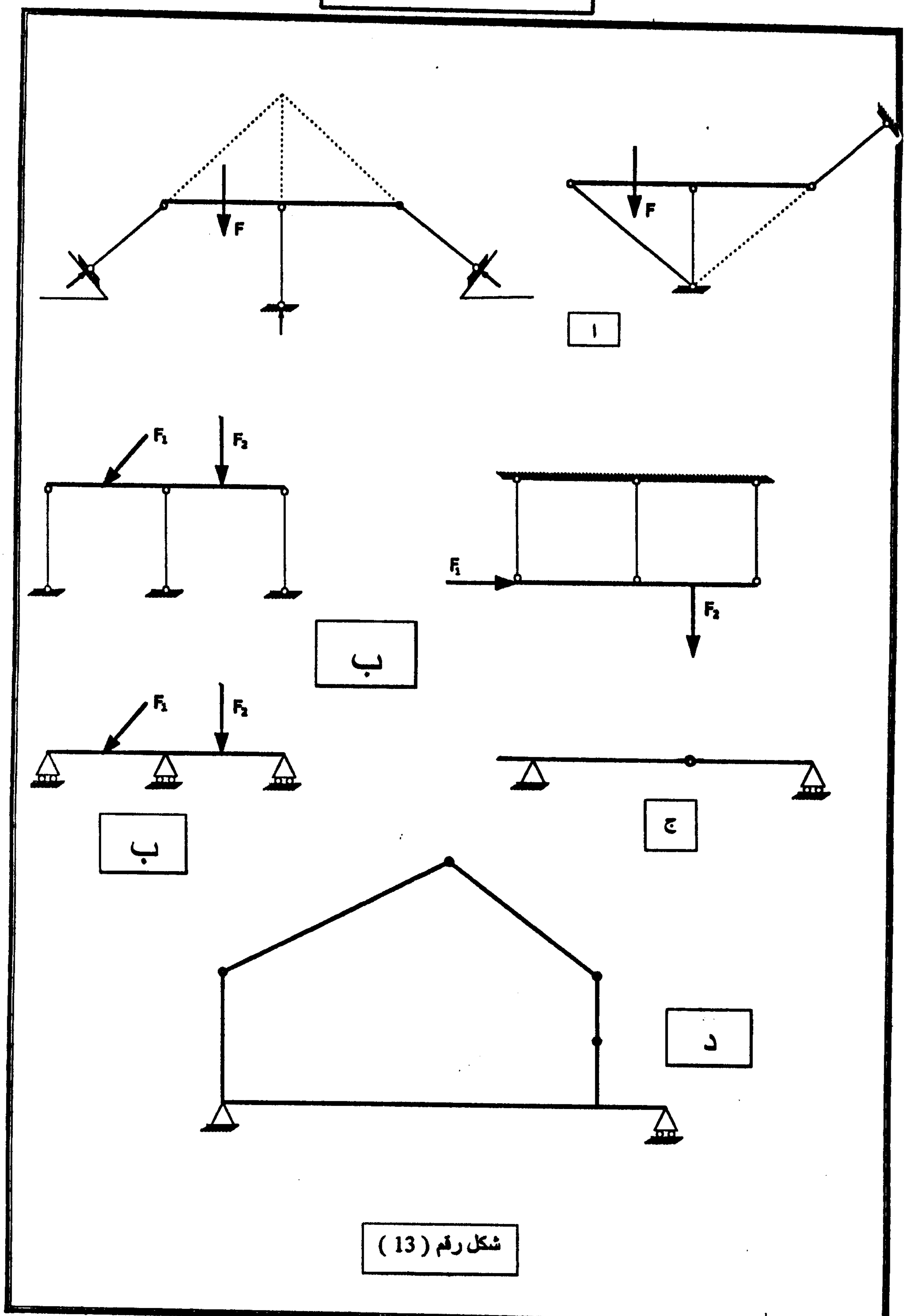
m = 10 , j = 9 , r = 6 , h = 0
D = (3*10 + 6) - (3*9 + 0) = 36 - 27 = 9
De = r - EE = 6 - 3 = 3
Di = D - De = 9 - 3 = 6

OR Di = 2(panel)* 3 = 6



m = 31 , j = 16 , r = 4 , h = 0
D = (1*31 + 4) - (2*16 + 0) = 35 - 32 = 3
De = r - EE = 4 - 3 = 1
Di = D - De = 3 - 1 = 2

تابع شكل رقم (12)

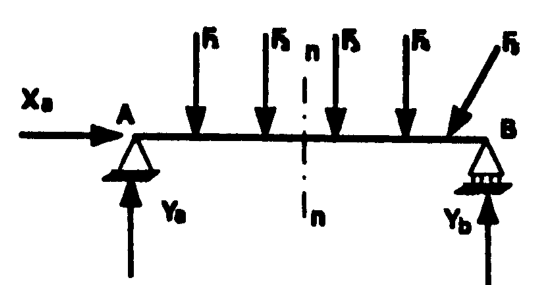


شكل رقم (13)

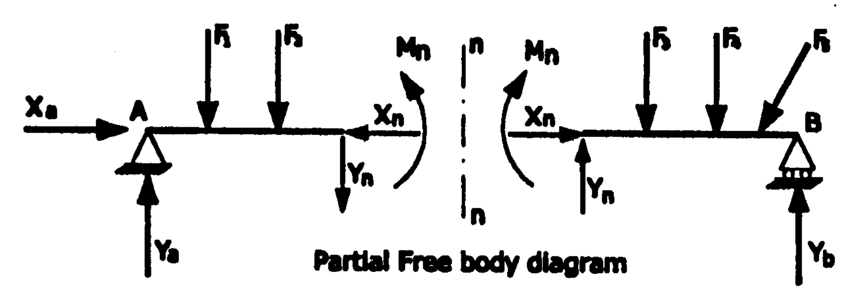
مؤثرات الاجهاد الداخلى (Internal Straining Actions)

المقصود بمؤثرات الاجهاد الداخلى عند قطاع معين هو ايجاد القوى الداخلية عند هذا القطاع ، وهى القوى العمودية (Normal Force) وقوى القص (Shearing Force) وعزوم الانحناء (Bending Moment) . ولكى نوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند أى قطاع يجب أولا ايجاد ردود الافعال الخارجية عند نقاط ارتكاز المنشأ وذلك بتطبيق شروط الاتزان السابق ذكرها ، وثانيا يتم فصل المنشأ عند هذا القطاع الى جزئين أحدهما على يمين هذا القطاع والأخر على يساره ويسمى كل جزء من هذين الجزئين ، جزء حر الحركة (Free-Body Diagram) وكل جزء يكون متزن نتيجة الأحمال الخارجية المؤثرة عليه وردود الأفعال وتاثير الجزء الأخر عليه . وتاثير كل جزء على الأخر يعبر عنه بمؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع الفاصل بينهما ، فمثلا اذا اعتبرنا كمرة بسيطة عليها الأحمال الموضحة بالشكل رقم (١٤) وكان المطلوب ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (n) فبعد ايجاد ردود الفعل الخارجية (X_a , Y_a , Y_b) من اتزان المنشأ ككل ، نفصل الكمرة عند القطاع (n) الى جزئين منفصلين تماما ونضع تأثير كل جزء على الآخر وهذا التأثير عبارة عن مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (n) وهى (X_n , Y_n , M_n) وتوضع كما هو موضح بالشكل (كل مؤثر على كل جزء يكون متساوى فى القيمة ومضاد فى الاتجاه) . ثم ندرس بعد ذلك اتزان كل جزء على حدة وذلك بتطبيق شروط الاتزان السابق ذكرها . وتسمى (X_n) بالقوة العمودية على قطاع المنشأ عند القطاع (n) ويكون اتجاهها عموديا على القطاع (ومكان تأثيرها ، اما منطبقا على محور الانشاء أو موازيا له) ، كما تسمى (Y_n) بالقوة القاصة للمنشأ عند القطاع (n) ويكون اتجاهها عموديا على محور الانشاء أو موازيا للقطاع ذاته وهى تقع فى مستوى القطاع ، وأخيرا تسمى (M_n) بعزم الانحناء للمنشأ عند القطاع (n) وهو يقع فى مستوى عمودى على مستوى القطاع (وهذا المستوى هو نفسه مستوى الأحمال الواقعة على المنشأ) وهو يدور حول محور عمودى على محور المنشأ. وقد جرت العادة عند ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند قطاع معين فى المنشآت التى لا يكون محورها أفقيا (مائلا أومنحنيا) أن نوجد هذه المؤثرات وخصوصا (X_n , Y_n) فى اتجاه المحورين – الأفقى والرأسى - (X,Y) ثم نوجد مركبات هذه القوى فى اتجاه عمودى على القطاع وفى اتجاه موازى له وبناءا عليه تكون القوة العمودية عند هذا القطاع هى مجموع مركبات جميع القوى فى اتجاه محور المنشأ عند هذا القطاع وتكون قوة القص عند نفس القطاع هى مجموع مركبات جميع القوى فى اتجاه موازى للقطاع ، شكل رقم (١٥) . ولعله من المناسب عند ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند أى قطاع وضع نظام ثابت للاشارات وذلك حتى يتسنى لنا معرفة اشارة مؤثرات الاجهاد الداخلى الموجبة والسالبة وهو ما يعرف باصطلاح الاشارات (Sign Convention) وهو على النحو التالى :-

- تعتبر القوة العمودية عند أى قطاع موجبة اذا أحدثت شدا على القطاع وتعتبر سالبة اذا أحدثت ضغطا على القطاع .



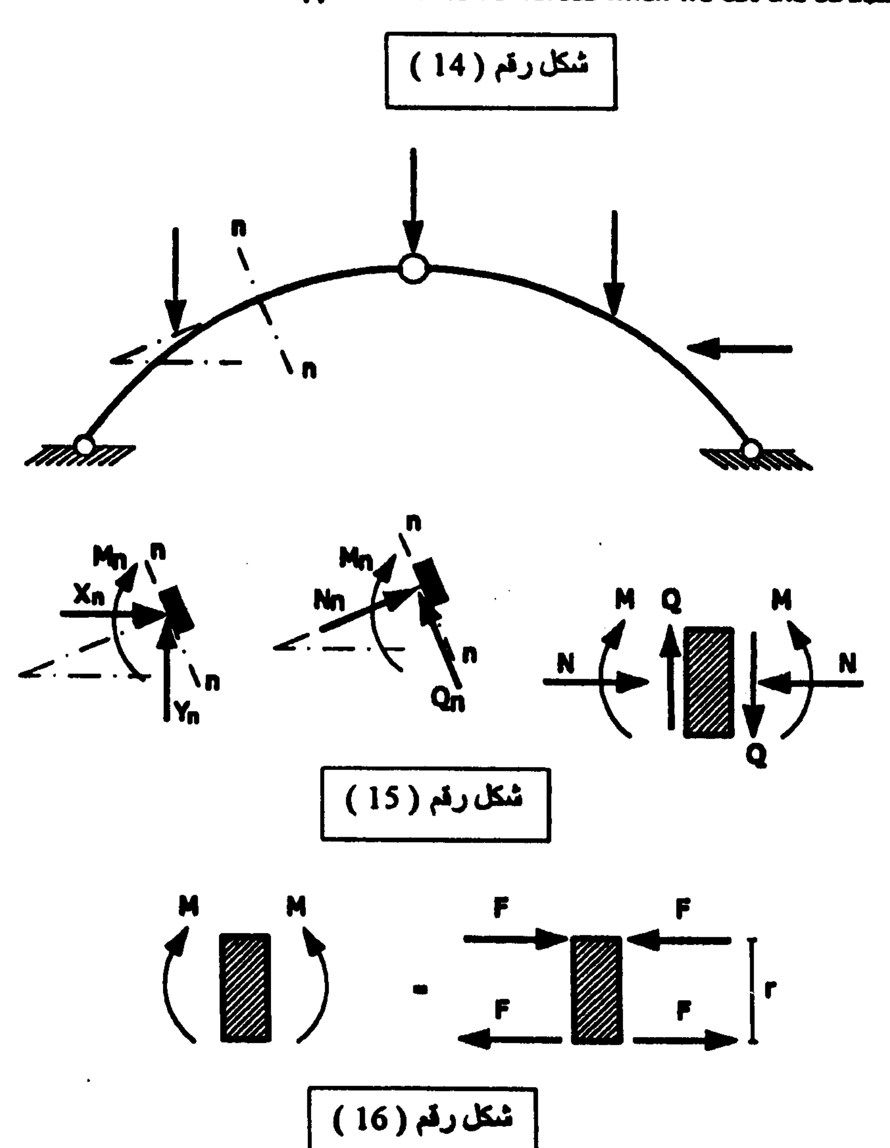
Free body diagram of complete structure



Partial Free body diagram

Internal forces appear as external forces when we cut the structure

شكل رقم (14)



شكل رقم (15)

شكل رقم (16)

- تعتبر قوة القص عند أى قطاع موجبة اذا أحدثت دورانا فى اتجاه عقارب الساعة حول محور يمر بمركز القطاع وعمودى على قوة القص وتعتبر سالبة اذا أحدثت دورانا فى اتجاه ضد عقارب الساعة حول نفس المحور .
- يعتبر العزم المؤثر على قطاع معين موجبا اذا أحدث تقعرا لمحور المنشأ بحيث يكون مركز التقوس الى أعلى (Center of Curvature) و العكس صحيح .

وعموما فى حالة عزوم الانحناء بالذات لاتعنينا الاشارة بقدر ما يعنينا جانب الشد وجانب الضغط من القطاع ، وذلك لأنه عند تصميم منشآت من الخرسانة المسلحة فان تحديد جانب الشد له أهمية خاصة حيث يجب وضع حديد التسليح فى هذا الجانب على اعتبار أن الخرسانة لا تتحمل اجهادات شد ، وعلى العكس فانه عند تصميم منشآت من الحديد فقط كالأسقف الخفيفة أو الكبارى الحديدية أو غيرها من المنشآت المعدنية فان لجانب الضغط أهمية خاصة ، حيث أن هذا النوع من المنشآت عادة ما يكون قطاع المنشأ فيه صغير اذا ما قورن ببقية الأبعاد ونتيجة لذلك اذا تعرض هذا القطاع لاجهاد ضغط حدث له انبعاج وتزداد قيمة الانبعاج كلما زاد طول العضو المعرض لاجهاد ضغط وبالتالى تتولد اجهادات اضافية لذلك نضع أربطة (Bracing System)على مسافات متقاربة فى الأعضاء المعرضة لاجهادات ضغط وذلك لتقليل الانبعاج ، ويكون مستوى هذه الأربطة عموديا على مستوى المنشأ . و أى عزم انحناء عند قطاع معين ، يحدث شدا فى جانب من القطاع ويحدث ضغطا فى الجانب الآخر من نفس القطاع وتفسير هذا ببساطة أن عزم الانحناء يمكن تحويله الى قوتين متساويتين فى القيمة ومتضادتين فى الاتجاه ، كما بالشكل رقم (١٦) .

أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى (Internal Straining Actions Diagrams)

لكى نستطيع تتبع التغير فى القوى الداخلية للقطاعات المختلفة فى المنشأ فانه يجب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى على طول محور المنشأ وذلك على النحو التالى :-

أ- شكل القوى العمودية (Normal Force Diagram) وهو الشكل الذى يكون احداثيه عند أى قطاع مساو لقيمة القوة العمودية المؤثرة على هذا القطاع ويختصر الى الصيغة (N.F.D) وهذا الاختصار مكون من الحرف الأول من كل كلمة ، وترسم الاحداثيات الموجبة أعلى خط القاعدة والاحداثيات السالبة أسفل خط القاعدة.

ب- شكل قوى القص (Shearing Force Diagram) واحداثيات هذا الشكل تعبر عن قيمة القص عند كل قطاع ويرمز له بالرمز (S.F.D) ، وترسم الاحداثيات الموجبة أعلى خط القاعدة والاحداثيات السالبة أسفل خط القاعدة.

ج- شكل عزوم الانحناء (Bending Moment Diagram) وفى هذا الشكل تكون احداثياته عند أى قطاع مساوية لقيمة عزم الانحناء عند هذا القطاع ويرمز له بالرمز (B.M.D) ، وترسم الاحداثيات الموجبة أسفل خط القاعدة والاحداثيات السالبة أعلى خط القاعدة ، وذلك عكس شكلى

القوى العمودية وقوى القص ، وعموما فى شكل عزوم الانحناء يتم رسم عزم الانحناء فى جانب الشد من القطاع .

أمثلة عددية على كيفية ايجاد ردود الأفعال المجهولة وذلك باستخدام شروط الاتزان

مثال ١

للكمرة ممتدة الأطراف الآتية ، أوجد ردود الفعل الخارجية عند الركيزتين (A , B) نتيجة للاحمال الموضحة بالشكل (١٧) .

الحل

١. نلاحظ أن الركيزة (A) هى من النوع المفصلى المثبت وبالتالى يكون لها مركبتان لردود الفعل الخارجية وهما رد فعل أفقى (X_a) والآخر رأسى (Y_a) ، بينما الركيزة (B) هى من النوع المفصلى المتحرك وبالتالى يكون لها رد فعل واحد فقط ويكون اتجاهه عموديا على اتجاه حركة الركيزة ، وحيث أن حركة الركيزة فى هذا المثال أفقية فان رد الفعل يكون رأسيا ويسمى (Y_b) .

٢. نطبق شروط الاتزان السابق ذكرها ، مع ملاحظة أنه يجب فرض اتجاه موجب لكل شرط من شروط الاتزان على أن يكون الاتجاه المعاكس سالبا وذلك على النحو التالى :-

أ. مجموع المركبات الأفقية = صفر

a- $\Sigma X = 0.0$ (+ve) → (-ve) ←

$\therefore \Sigma X = X_a + 2 - 3 = 0.0 \quad \therefore X_a = 1^t$

ب – مجموع العزوم حول الركيزة (A) = صفر

b- $\Sigma M @ A = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ A = -4*2 + 8*3 + 10*7 - Y_b*10 + 6*12 + 2 = 0.0 , \quad \therefore Y_b = 16^t$

ج- لايجاد رد الفعل الرأسى عند (A) يمكن تطبيق الشرط الثالث من شروط الاتزان وهو ($\Sigma Y = 0.0$) ولكننا نفضل ارجاء هذا الشرط للتحقق من النتائج بعد ايجاد رد الفعل المتبقى وهو (Y_a) وذلك باستخدام شرط آخر - بحيث لايعتمد هذا الشرط على رد الفعل المحسوب بالشرط السابق - وهو مجموع العزوم حول الركيزة (B) = صفر وذلك لأنه من المحتمل ان يكون هناك خطأ ما فى حساب رد الفعل الرأسى عند الركيزة (B) وبالتالى يصبح رد الفعل الرأسى عند (A) غير صحيح .

c- $\Sigma M @ B = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ B = -6*2 + 10*3 + 8*7 - Y_a*10 + 4*12 - 2 = 0.0$

$\therefore Y_a = 12^t$

د- يجب التحقق من قيم ردود الأفعال السابق حسابها وذلك باستخدام شرط من شروط الاتزان لم يسبق استخدامه فى حساب أى من ردود الأفعال السابقة ، وهذا الشرط هو (ΣY) .

d- Check , ΣY

$\Sigma Y = (12 + 16) - (4 + 8 + 10 + 6) = 28 - 28 = 0.0 \quad \therefore$ O.K.

اذا تحقق هذا الشرط دل ذلك على صحة النتائج وبالتالى يمكن الاستمرار فى حساب القوى الداخلية ، واذا لم يتحقق هذا الشرط دل ذلك على وجود خطأ ما فى حساب احدى مركبات ردود الأفعال أو فى جميعها ، وعندئذ يجب اعادة الحسابات لتصحيح الخطأ أو الأخطاء الموجودة حتى يتسنى لنا تكملة حساب القوى الداخلية .

مثال ٢

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٨) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل .

الحل

فى هذا المثال نلاحظ وجود أحمال موزعة بالاضافة الى الأحمال المركزة ، لذلك يجب فى مثل هذه الأحوال استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة بحيث تكون هذه الأحمال المركزة مكافئة للأحمال الموزعة وتؤثر فى مركز ثقلها ، ثم بعد ذلك نطبق نفس الخطوات السابق ذكرها فى المثال السابق ، مع ملاحظة أنه اذا وجدت أحمال مركزة مائلة بزاوية ما يجب تحليلها الى مركبتين احداهما أفقية والأخرى رأسية بما فى ذلك ردود الأفعال الخارجية ، وذلك حتى يتسنى لنا تطبيق شرطى الاتزان الخاصين بمجموع مركبات القوى الأفقية والقوى الراسية ($\Sigma X = 0.0$, $\Sigma Y = 0.0$) .

a- $F1 = (2/3) * 4 * 6 = 16$ ton , $F2 = 4 * 3 = 12$ ton , $F3 = 0.5 * 4 * 3 = 6$ ton .

b- $X_a = R_a \sin\theta$, $Y_a = R_a \cos\theta$; where [$\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$]

c- $\Sigma M @ A = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ A = 16 * 3 - 9 * 6 + 12 * 7.5 + 6 * 10 - Y_b * 9 = 0.0$

$\therefore Y_b = 16$ ton .

d- $\Sigma M @ B = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ B = -6 * 1 + 12 * 1.5 - 9 * 3 + 16 * 6 - Y_a * 9 = 0.0$

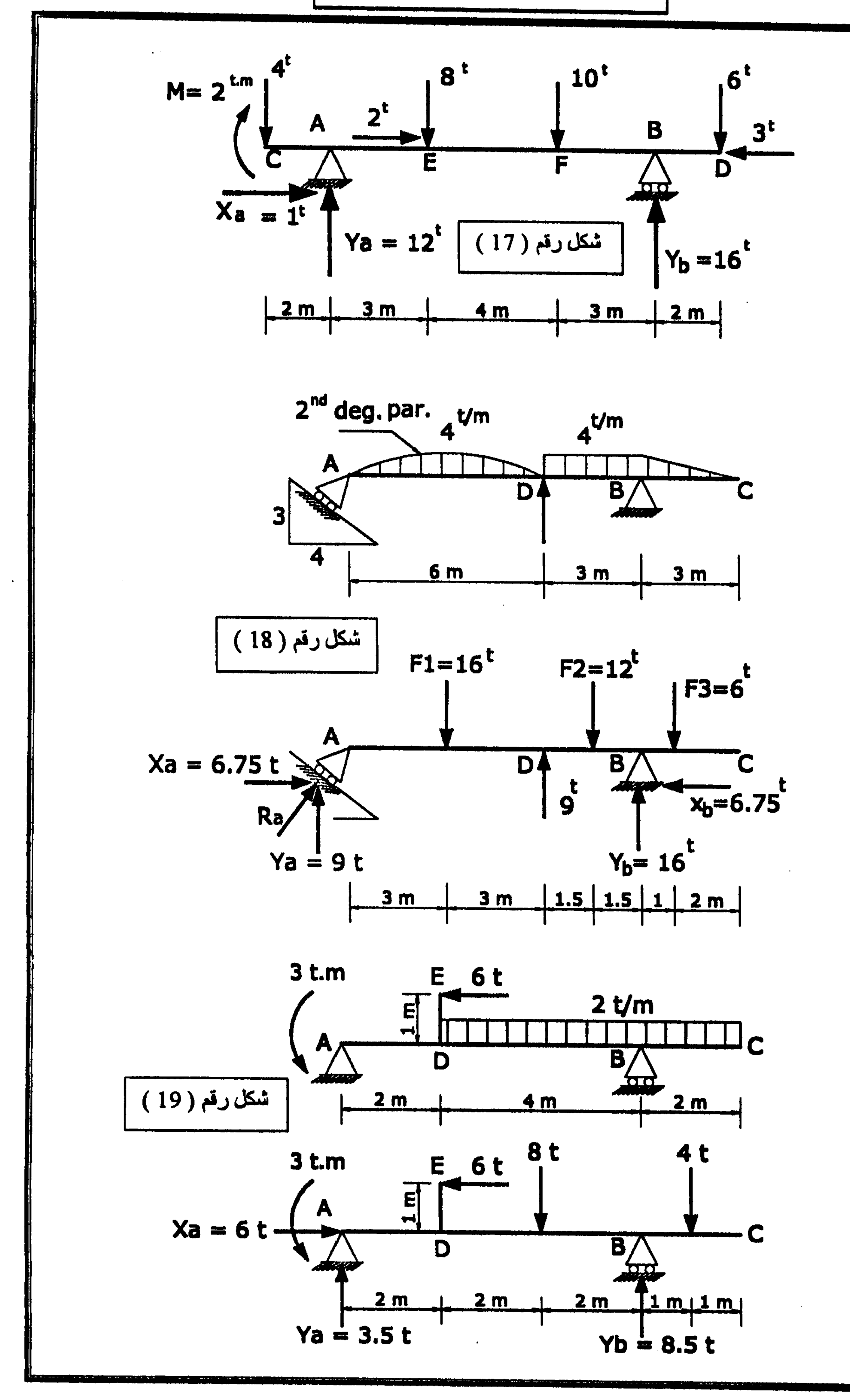
$\therefore Y_a = 9$ ton , but $Y_a = R_a \cos\theta = 0.8 R_a$, $\therefore R_a = 9 / 0.8 = 11.25$ ton .

e- $X_a = R_a \sin\theta = 11.25 * 0.6 = 6.75$ ton .

f- $\Sigma X = 0.0$

$\therefore 6.75 - X_b = 0.0$, i.e. $X_b = 6.75$ ton .

g- Check , $\Sigma Y = (9 + 16 + 9) - (16 + 12 + 6) = 34 - 34 = 0.0$, $\therefore$ O.K.



M= 2 t.m
4t
8t
10t
6t
2t
3t
A
B
C
E
F
D
Xa = 1t
Ya = 12t
Yb =16t
شكل رقم (17)
2 m
3 m
4 m
3 m
2 m
2nd deg. par.
4 t/m
4 t/m
A
D
B
C
3
4
6 m
3 m
3 m
شكل رقم (18)
F1=16t
F2=12t
F3=6t
Xa = 6.75 t
Ra
Ya = 9 t
9t
Xb=6.75t
Yb= 16t
3 m
3 m
1.5
1.5
1
2 m
3 t.m
E
6 t
2 t/m
1 m
A
D
B
C
شكل رقم (19)
2 m
4 m
2 m
3 t.m
E
6 t
8 t
4 t
Xa = 6 t
Ya = 3.5 t
Yb = 8.5 t
2 m
2 m
2 m
1 m
1 m

مثال ٣

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٩) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل .

الحل

يمكن تتبع الحل كما يلى : -

a- $\Sigma M @ A = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ A = 8 * 4 + 4 * 7 - 6 * 1 - 3 - Y_b * 6 = 0.0$

$\therefore Y_b = 8.5$ ton .

b- $\Sigma M @ B = 0.0$

$\therefore \Sigma M @ B = -4 * 1 + 8 * 2 + 6 * 1 + 3 - Y_a * 6 = 0.0$

$\therefore Y_a = 3.5$ ton.

c- $\Sigma X = 0.0$

$\therefore 6 - X_b = 0.0$, i.e. $X_b = 6$ ton .

d- Check , $\Sigma Y = (3.5 + 8.5) - (8 + 4) = 12 - 12 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

مثال ٤

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (٢٠) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل .

الحل

فى هذا المثال ، نلاحظ أن المنشأ مرتكز على ثلاث ركائز بندولية فى اتجاهات مختلفة ، اى ان عدد مركبات ردود الفعل ثلاث مركبات ؛ كل مركبة يكون اتجاهها فى اتجاه البندول الخاص بها ، ويتم تحليل أى مركبة مائلة الى مركبتين احداهما فى اتجاه المحور الأفقى والأخرى فى اتجاه المحور الراسى ، وكذلك يتم تحليل أى حمل خارجى مائل الى مركبتين ؛ احداهما أفقية والأخرى رأسية وذلك حتى نتمكن من تطبيق شرطى الاتزان الأفقى و الرأسى (مجموع المركبات الأفقية = صفر ومجموع المركبات الراسية = صفر) . ويفضل فى مثل هذا النوع من المنشآت أن نطبق الشرط الرابع من شروط الاتزان – وهو مجموع العزوم = صفر حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة – وذلك حتى يتم حساب كل مركبة من مركبات ردود الأفعال على حدة ودون أن تعتمد المركبة المحسوبة على بقية مركبات ردود الأفعال الأخرى وبذلك نتلافى وجود أى خطأ فى حساب أى من مركبات ردود الأفعال الأخرى . ولايجاد مركبة رد فعل معينة نأخذ العزوم حول نقطة تلاقى مركبتى ردى الفعل الأخريين وهكذا . بعد حساب جميع مركبات ردود الأفعال بهذه الطريقة يتم عمل التحقيق

الحسابى باستخدام شرطى الاتزان الآخرين والذين لم يسبق استخدامهما وهما مجموع مركبات القوى الأفقية والرأسية . وبذلك يتم حل هذا المنشأ على النحو التالى : -

١. يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة ومكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها .

٢. يتم تحليل القوة الموجودة على الضلع المائل الى مركبتين احداهما أفقية (١٨ طن) و الأخرى راسية (٢٤ طن) وذلك بضرب هذه القوة فى جيب زاوية الضلع المائل مع الأفقى وجيب تمام هذه الزاوية على الترتيب . كما يمكن ايجاد المركبة الأفقية مباشرة وذلك بضرب كثافة الحمل فى المسقط الجانبى للضلع المائل (٤,٥ متر) وكذلك المركبة الرأسية بضرب كثافة الحمل فى المسقط الأفقى للضلع المائل (٦ متر) .

٣. لايجاد رد الفعل الرأسى عند (C) ، نأخذ مجموع العزوم حول (O_1) - نقطة تلاقى مركبتى ردى الفعل عند (A , B) .

- $\Sigma M @ O_1$

$\therefore \Sigma M @ O_1 = -28 * 0.5 + 24 * 6 - 18 * 1.75 + 16.5 + 12 * 11 - Y_c * 13 = 0.0$

$\therefore Y_c = 19\ t$.

٤. لايجاد رد الفعل عند (A) ، نأخذ مجموع العزوم حول (O_2) – نقطة تلاقى مركبتى ردى الفعل عند (B , C) – مع ملاحظة تحليل رد الفعل عند (A) الى مركبتين احداهما أفقية (X_a) والأخرى راسية (Y_a) وذلك عند نقطة (H) والتى تقع على نفس الخط الأفقى المار بنقطة (O_2) وذلك حتى تتلاشى احدى مركبتى رد الفعل وهى (X_a) ، ومن ثم نوجد مركبة رد الفعل الرأسى (Y_a) ثم بعد ذلك نوجد (X_a) .

- $\Sigma M @ O_2$

$\therefore \Sigma M @ O_2 = 12 * 2 - 16.5 - 18 * (6.25 + 9.33) + 24 * 7 + 28 * 13.5 - Y_a * 30.33 = 0.0$, i.e. $Y_a = 9\ t$.

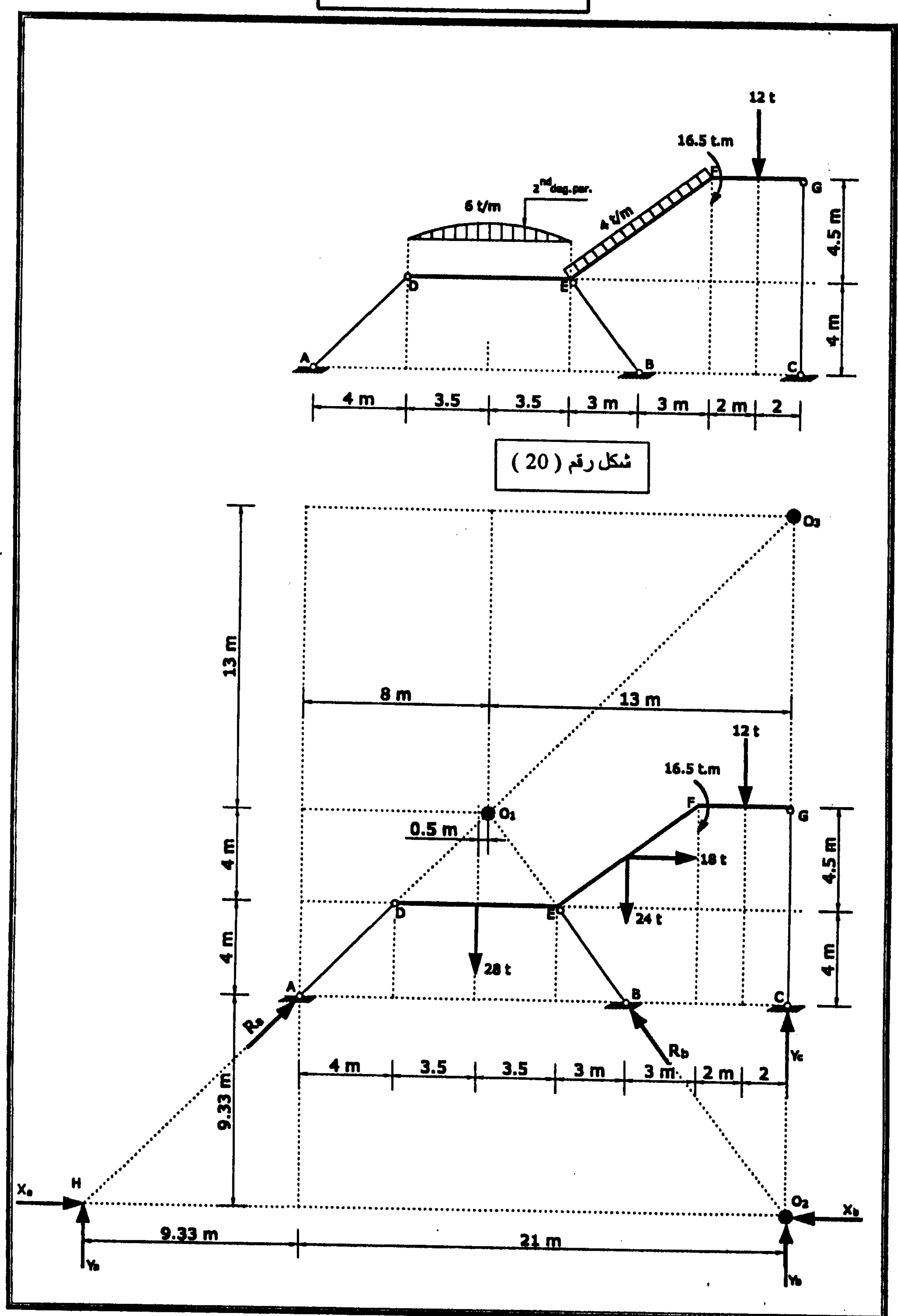
but , $\tan\theta_1 = \tan 45^o = Y_a / X_a$, $\therefore X_a = 9\ t$, and $R_a = 12.73\ t$.

٥. لايجاد رد الفعل عند (B) ، نأخذ مجموع العزوم حول (O_3) – نقطة تلاقى مركبتى ردى الفعل عند (A , C) – مع ملاحظة تحليل رد الفعل عند (B) الى مركبتين احداهما أفقية (X_b) والأخرى راسية (Y_b) وذلك عند نقطة (O_2) والتى تقع على نفس الخط الرأسى المار بنقطة (O_3) وذلك حتى تتلاشى احدى مركبتى رد الفعل وهى (Y_b) ، ومن ثم نوجد مركبة رد الفعل الأفقى (X_b) ثم بعد ذلك نوجد (Y_b) .

- $\Sigma M @ O_3$

$\therefore \Sigma M @ O_3 = 12 * 2 - 16.5 + 24 * 7 + 18 * 14.75 + 28 * 13.5 - X_b * 30.33 = 0.0$

$\therefore X_b = 27$ ton , but $\tan\theta_2 = 1.33 = Y_b / X_b$, $\therefore Y_b = 36$ ton , and $R_b = 45$ ton.


12 t
16.5 t.m
2nd deg.par.
6 t/m
4 t/m
A
B
C
D
E
F
G
4.5 m
4 m
4 m
3.5
3.5
3 m
3 m
2 m
2
O3
13 m
8 m
13 m
12 t
16.5 t.m
O1
0.5 m
18 t
24 t
28 t
Ra
Rb
Yc
9.33 m
Xa
H
Ya
O2
Xb
Yb
9.33 m
21 m

شكل رقم (20)

٦. التحقيق الحسابى و ذلك باستخدام شرطى الاتزان الأفقى والرأسى (مجموع مركبات القوى الأفقية و مجموع مركبات القوى الرأسية ، و مقارنة ذلك بالصفر) .

- Check
- $\Sigma X = (9 + 18) - 27 = 27 - 27 = 0.0 \quad \therefore$ O.K.
- $\Sigma Y = (9 + 1 + 36 + 18) - (28 + 24 + 12) = 64 - 64 = 0.0 \quad \therefore$ O.K.

أمثلة على بعض المنشآت المركبة

مثال ٥

للكمرة المفصلية الموضحة بالشكل رقم (٢١) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل .

الحل

نلاحظ فى هذا المثال أن الركيزة عند (A) ركيزة تامة التثبيت ، وبناءا عليه فان لها ثلاث مركبات لردود الفعل و الركيزة عند (B) ركيزة مفصلية متحركة لها رد فعل واحد فقط عمودى على اتجاه الحركة ، وبذلك يكون اجمالى عدد مركبات ردود الفعل الخارجية المجهولة = ٤ . وعدد معادلات الاتزان الأصلية = ٣ ، بالاضافة الى وجود مفصل عند نقطة (C) وهذا المفصل يضيف شرطا رابعا وهو أن العزم عنده = صفر وعليه تكون خطوات الحل كالآتى : -

١. باعتبار العزم عند المفصل (C) من ناحية اليمين = صفر وذلك لايجاد رد الفعل الرأسى عند (B) .

- M_c right = 0.0

  M_c right $= 12 * 3 + 3 * 8 - Y_b * 6 = 0.0$

  $\therefore Y_b = 10$ ton

٢. مجموع القوى الأفقية = صفر

- $\Sigma X = 0.0 \;, \quad \therefore X_a = 0.0$

٣. مجموع القوى الرأسية = صفر

- $\Sigma Y = 0.0 \;, \quad \therefore (Y_a + Y_b) - (4 + 12 + 3) = 0.0 \;, \quad \therefore Y_a + 10 - 19 = 0.0$

  $\therefore Y_a = 9$ ton

٤. مجموع العزوم عند (A) = صفر

- $\Sigma M @ A = 0.0$

  $\Sigma M @ A = M_a - 4 * 1 - 12 * 5 + 10 * 8 - 3 * 10 = 0.0$

  $\therefore M_a = 14$ t.m

٥. التحقيق الحسابى ، بأخذ العزوم عند المفصل (C) من ناحية اليسار .

- Check , Mc left = 4 * 1 + 14 – 9 * 2 = 18 – 18 = 0.0 , ∴ O.K.

ملحوظة هامة

هذا المنشأ يمكن حله بطريقة أخرى ، حيث أن هذا المنشأ مركب وأنه مكون من جزءين ؛ الجزء الأول (CBD) مرتكز على الجزء الثابى وهو الكابولى (AC) ، وبناءا عليه يتم حل كل جزء على حدة مع الأخذ فى الاعتبار تأثير كل جزء على الأخر ، مع ملاحظة أن الجزء الأول وهو الجزء الثانوى لايتأثر بالجزء الرئيسى وهو الكابولي ولكن يؤثر عليه . وعلى هذا سوف نبدأ بحل الجزء الأول وهو عبارة عن كمرة ممتدة الطرف كما هو موضح بالشكل رقم (٢١) ، وسوف نطبق شروط الاتزان الثلاثة على النحو التالى : -

١. مجموع العزوم حول (C) =صفر

- Σ M @ C = 0.0

  Σ M @ C = 12 * 3 + 3 * 8 – Yb * 6 = 0.0

  ∴ Yb = 10 ton

٢. مجموع مركبات القوى الأفقية = صفر

- Σ X = 0.0 , ∴ Xc = 0.0

٣. مجموع المركبات الراسية = صفر

- Σ Y = 0.0

  Σ Y = Yc +Yb – 12 - 3 = 0.0 , ∴ Yc + 10 – 12 –3 = 0.0

  ∴ Yc = 5 ton

٤. يتم التحقق حسابيا من هذه القيم وذلك بأخذ العزوم حول نقطة (B) .

- Check

  Σ M @ B = -3 * 2 + 12 * 3 – 5 * 6 = - 6 + 36 – 30 = 36 – 36 = 0.0 , ∴ O.K.

٥. لكى نوجد مركبات ردود الفعل على الجزء (AC) ، نأخذ تأثير الجزء الثانوى (CBD) أولا وهو فى هذه الحالة عبارة عن مركبتى ردى الفعل عند نقطة الاتصال (C) وهما (Xc , Yc) وبعكس الاتجاه كما هو موضح بالشكل رقم (٢٠) .

٦. مجموع القوى الأفقية = صفر .

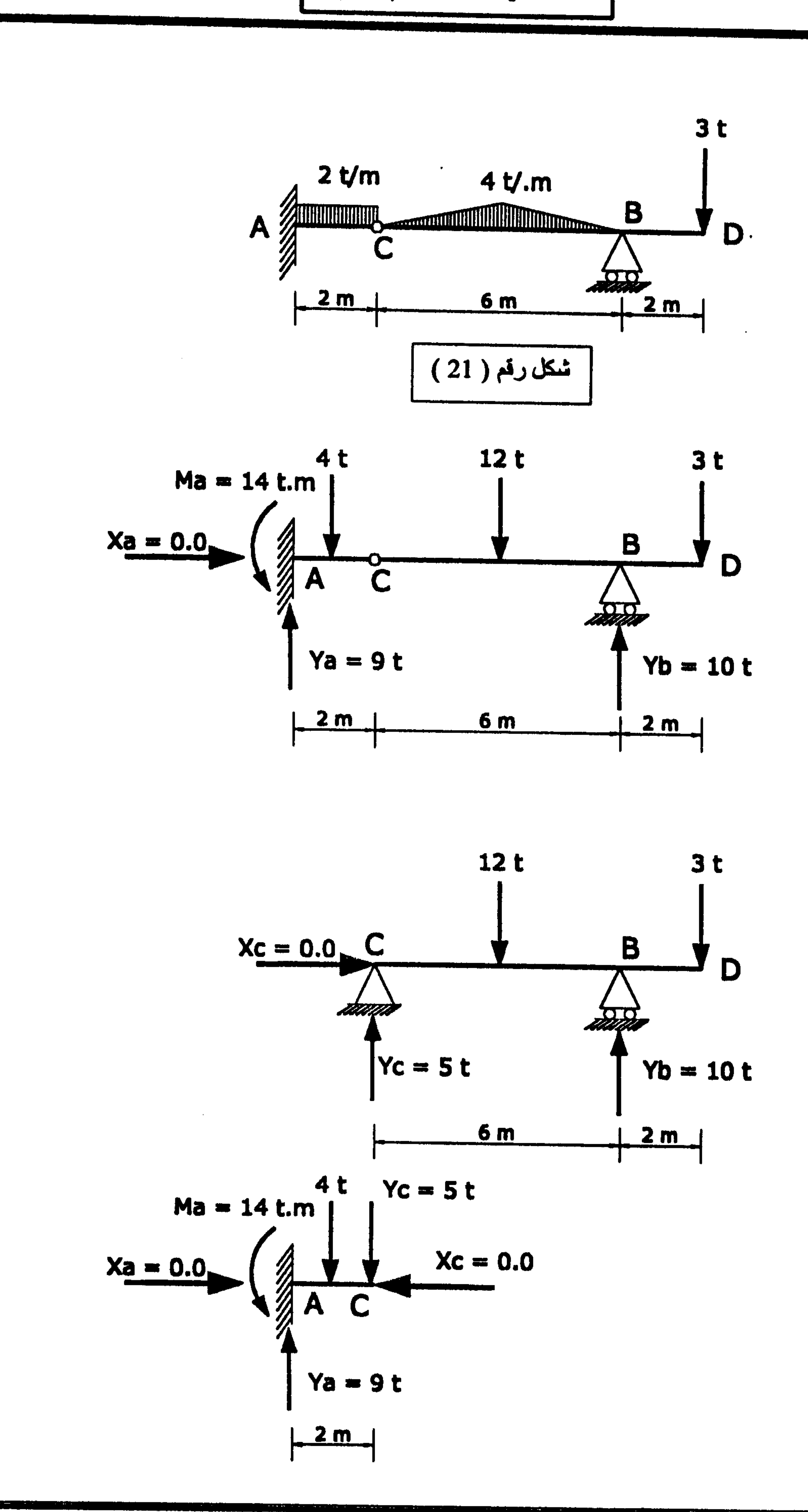
- Σ X = 0.0 , ∴ Xa = Xc = 0.0

٧. مجموع القوى الراسية = صفر .

- Σ Y = 0.0 , ∴ Ya – 4 - 5 = 0.0 , ∴ Ya = 9 ton

٨. مجموع العزوم حول (A) = صفر .

- Σ M @ A = 0.0


3 t
2 t/m
4 t/.m
A
C
B
D
2 m
6 m
2 m
شكل رقم (21)
4 t
12 t
3 t
Ma = 14 t.m
Xa = 0.0
Ya = 9 t
Yb = 10 t
Xc = 0.0
Yc = 5 t

$\Sigma M @ A = Ma - 4 * 1 - 5 * 2 = 0.0$, $\therefore Ma = 14$ t.m .

٩. التحقيق الحسابى ، بأخذ مجموع العزوم حول نقطة (C) .

- $\Sigma M @ C = 4 * 1 + 14 - 9 * 2 = 18 - 18 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

مثال ٦

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (٢٢) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل ، وكذلك مركبات ردود الأفعال عند المفصلين الداخليين (C , E) .

الحل

نلاحظ أن هذا المنشأ مكون من جزءين ، الجزء الأول (CDEF) وهو الجزء الثانوى مرتكز على الجزء الثانى (ABGH) وهو الجزء الرئيسى ، كما نلاحظ أن الجزء الرئيسى يرتكز عند (B) على ركيزة مفصلية مثبتة وبالتالى يوجد مركبتين لرد الفعل عندها ؛ والركيزة الأخرى التى يرتكز عليها الجزء الرئيسى هى البندول (AG) وبالتالى يكون رد الفعل فى اتجاه البندول ، وكما ذكر فى الأمثلة السابقة يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها ، ثم بعد ذلك نأخذ العزوم حول الركيزة (B) لايجاد رد فعل البندول (Ra) مباشرة وذلك باستخدام البعد العمودى على البندول وهو (r_1) أو بتحليل رد فعل البندول (Ra) الى مركبتين احداهما أفقية (Xa) والأخرى رأسية (Ya) وهذا هو الأيسر ، وبعد ايجاد مركبتى رد فعل البندول يتم تطبيق بقية شروط الاتزان وهى مجموع مركبات القوى الأفقية = صفر وكذلك مجموع مركبات القوى الرأسية = صفر وذلك لايجاد مركبتى رد الفعل عند (B) وبعد ذلك يتم عمل تحقيق حسابى على قيم ردود الأفعال التى تم حسابها وذلك باستخدام شرط من شروط الاتزان لم يسبق استخدامه فى حساب القيم السابقة . ولايجاد قيم ردود الفعل الداخلية عند المفصلين (C , E) ، يتم فصل الجزء الثانوى (CDEF) وعمل اتزان مستقل له وذلك باستخدام شروط الاتزان المعروفة وبنفس الخطوات السابقة .

أولا الجزء الرئيسى (ABGH)

- $\Sigma M @ B = 0.0$

$\Sigma M @ B = 12 * 2 + 6 * 6 - 3 * 10 - Ya * 6 = 0.0$

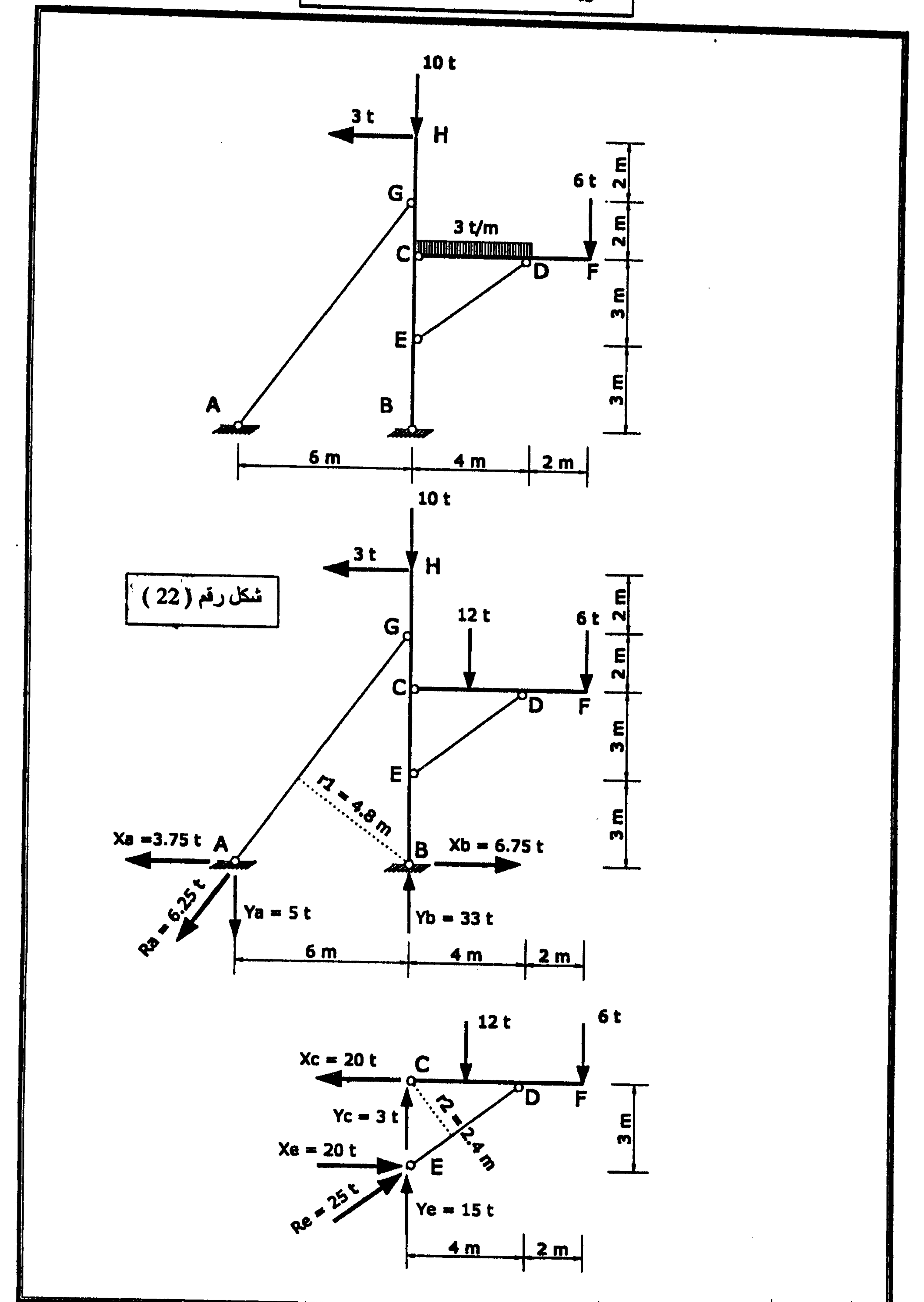
$\therefore Ya = 5$ ton , but $\tan\theta_1 = Ya / Xa = 8 / 6$, $\therefore Xa = 3.75$ ton

but , $Ra = \sqrt{(Ya^2 + Xa^2)} = \sqrt{(5^2 + 3.75^2)} = 6.25$ ton .

or , $\Sigma M @ B = 12 * 2 + 6 * 6 - 3 * 10 - Ra * r_1 = 0.0$, $r_1 = 4.8$ m

$\therefore Ra = 6.25$ ton , $Ya = Ra . \sin\theta_1 = 6.25 * 0.8 = 5$ ton ,

$Xa = Ra . \cos\theta_1 = 6.25 * 0.6 = 3.75$ ton



10 t
3 t
H
G
6 t
3 t/m
C
D
F
E
A
B
2 m
2 m
3 m
3 m
6 m
4 m
2 m
10 t
3 t
H
شكل رقم (22)
12 t
6 t
G
C
D
F
E
r1 = 4.8 m
Xa =3.75 t
A
B
Xb = 6.75 t
Ra = 6.25 t
Ya = 5 t
Yb = 33 t
6 m
4 m
2 m
12 t
6 t
Xc = 20 t
C
D
F
Yc = 3 t
r2 = 2.4 m
Xe = 20 t
E
Re = 25 t
Ye = 15 t
4 m
2 m
3 m

- $\Sigma M @ G = 0.0$

  $\Sigma M @ G = 12 * 2 + 6 * 6 - 3 * 2 - Xb * 8 = 0.0$, $\therefore Xb = 6.75$ ton .

- $\Sigma M @ A = 0.0$

  $\Sigma M @ A = 10 * 6 + 12 * 8 + 6 * 12 - 3 * 10 - Yb * 6 = 0.0$, $\therefore Yb = 33$ ton .

- Check

  $\Sigma X = 6.75 - 3.75 - 3 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

  $\Sigma Y = (Yb - Ya) - (10 + 12 + 6) = (33 - 5) - 28 = 28 - 28 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثانيا الجزء الثانوى (CDEF)

يتم فصل هذا الجزء على حدة ، ثم يتم تطبيق شروط الاتزان على هذا الجزء فقط وذلك لايجاد مركبات ردود الفعل عند المفصلين (C , E) ، وذلك على النحو التالى :-

- $\Sigma M @ C = 0.0$

  $\Sigma M @ C = 12 * 2 + 6 * 6 - Xe * 3 = 0.0$, $\therefore Xe = 20$ ton .

  but $\tan\theta_2 = Ye / Xe = 3 / 4$, $\therefore Ye = 0.75 * Xe = 0.75 * 20 = 15$, $\therefore Ye = 15$ ton.

- $\Sigma M @ E = 0.0$

  $\Sigma M @ E = 12 * 2 + 6 * 6 - Xc * 3 = 0.0$, $\therefore Xc = 20$ ton .

- $\Sigma M @ D = 0.0$

  $\Sigma M @ D = 12 * 2 - 6 * 2 - Yc * 4 = 0.0$, $\therefore Yc = 3$ ton .

- Check

  $\Sigma X = Xe - Xc = 20 - 20 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

  $\Sigma Y = (Ye + Yc) - (12 + 6) = (15 + 3) - 18 = 18 - 18 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

مثال ٧

للاطار ثلاثى المفاصل الموضح بالشكل رقم (٢٣) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل ، وكذلك مركبات ردود الأفعال عند المفصل الداخلي (C) .

الحل

نلاحظ فى هذا المنشأ أن الركيزة عند (A) ركيزة مفصلية مثبتة وبالتالى يكون لها مركبتان لرد الفعل وكذلك الركيزة عند (B) ، لذلك يكون اجمالى عدد مركبات ردود الفعل الخارجية = ٤ ، كما نلاحظ أن عدد شروط الاتزان المعروفة = ثلاثة ، بالاضافة الى وجود شرط اضافى وهو أن العزم عند نقطة (C) = صفر وذلك بسبب وجود مفصل داخلى عند نقطة (C) ، وبذلك تكون خطوات الحل كالآتى :-

١. نستبدل الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها كما هو موضح بالشكل .

٢. نأخذ مجموع عزوم الانحناء حول الركيزة (A) ونساويه بالصفر ، وتكون النتيجة تكون معادلة فى مجهولين هما عبارة عن مركبتى ردى الفعل عند (B) وهما (Xb , Yb) .

- $\Sigma M @ A = 0.0$

  $\Sigma M @ A = 18 * 3 + 5 * 6 + 4 * 7 - Yb * 8 - Xb * 4 = 0.0$,

  $\therefore$ **112 – 8 Yb – 4 Xb = 0.0** ....(1)

٣. نأخذ العزم عند المفصل (C) من ناحية اليمين ونساويه بالصفر ، وذلك لايجاد معادلة ثانية فى نفس المجهولين السابقين .

- Mc right = 0.0

  $Mc\ right = 4 * 1 + Xb * 3 - Yb * 2 = 0.0$,

  $\therefore 4 - 2\ Yb + 3\ Xb = 0.0$ ....(2)

٤. بحل المعادلتين (1 , 2) نحصل على مركبتى ردى الفعل عند الركيزة (B) .

  i.e. Xb = 6 ton , Yb = 11 ton .

٥. باستخدام شرط مجموع القوى الأفقية = صفر .

- $\Sigma X = 0.0$, i.e. $Xa - Xb = 0.0$, or $Xa - 6 = 0.0$, $\therefore Xa = 6$ ton .

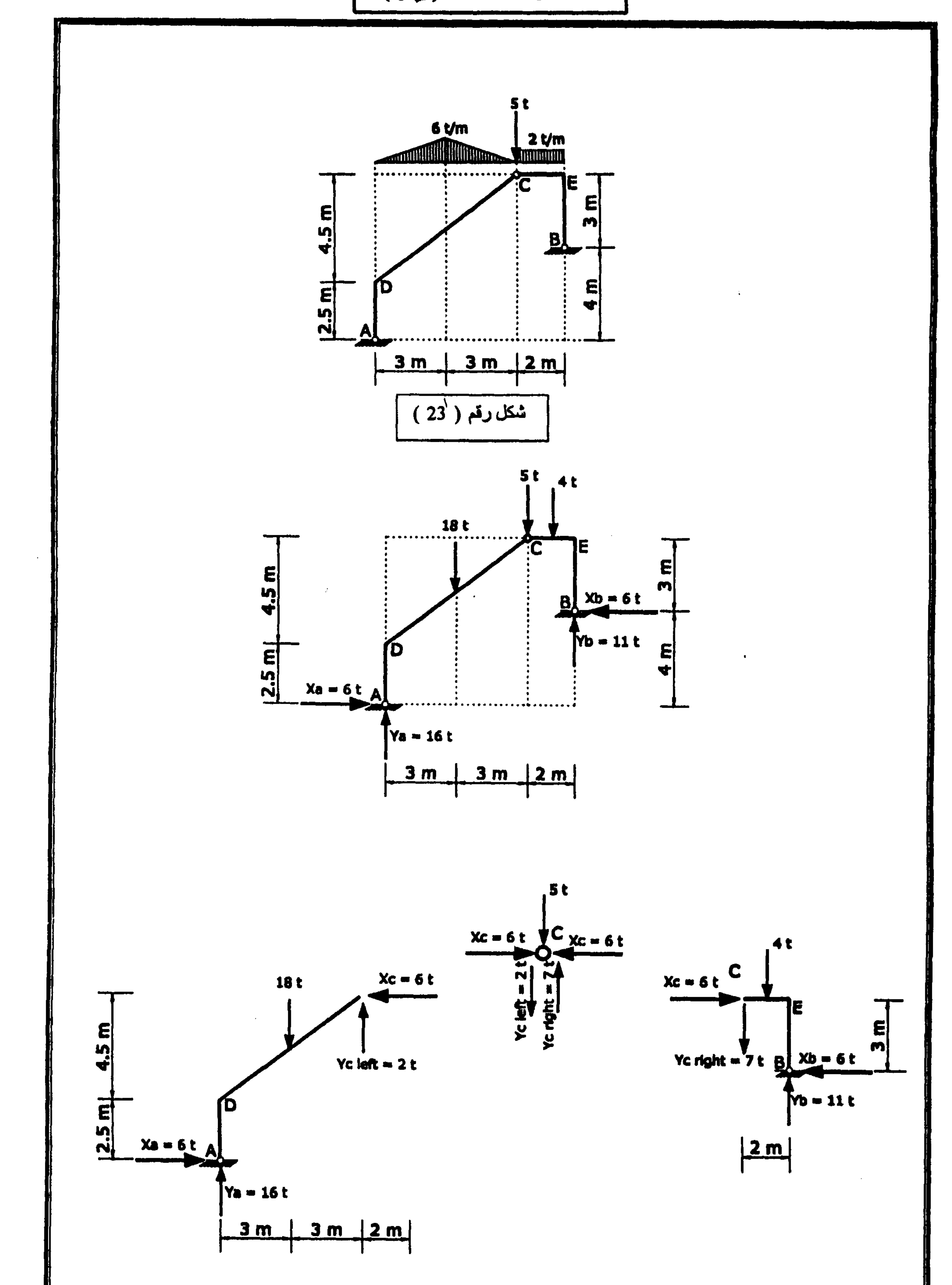
٦. باستخدام شرط مجموع القوى الرأسية = صفر

- $\Sigma Y = 0.0$, i.e. $Ya + 11 - (18 + 5 + 4) = Ya - 16 = 0.0$, $\therefore Ya = 16$ ton .

٧. يتم عمل تحقيق حسابى وذلك باستخدام شرط من شروط الاتزان لم يسبق استخدامه ، ليكن هذا الشرط هو العزم عند المفصل (C) من ناحية اليسار .

- Check , $Mc\ left = 18 * 3 + Xa * 7 - Ya * 6 = 18 * 3 + 6 * 7 - 16 * 6 = 96 - 96$

  $= 0.0$ $\therefore$ O.K.



6 t/m
5 t
2 t/m
C
E
B
D
A
4.5 m
2.5 m
3 m
4 m
3 m
3 m
2 m
18 t
4 t
Xb = 6 t
Yb = 11 t
Xa = 6 t
Ya = 16 t
Xc = 6 t
Yc left = 2 t
Yc right = 7 t
2 m

شكل رقم (23)

لايجاد مركبات ردود الأفعال عند المفصل الداخلى (C) يتم فصل الاطار عند المفصل (C) الى جزءين ودراسة اتزان كل جزء على حدة ، فمثلا لو تم اختيار الجزء الأيمن لعمل الاتزان عليه ، فسوف نطبق شرطى الاتزان الأفقى و الرأسى – مجموع مركبات القوى الأفقية = صفر لايجاد رد الفعل الأفقى عند (C) ، مجموع مركبات القوى الرأسية =صفر لايجاد رد الفعل الرأسى عند (C) – لايجاد مركبتى رد الفعل عند المفصل (C) . ولايجاد تأثير الجزء الأيمن على الجزء الأيسر يتم عكس اتجاهات مركبتى رد الفعل عند (C) مع الاحتفاظ بنفس القيم ، مع عمل تحقيق حسابى وذلك بأخذ مجموع العزوم حول الركيزة (A) ومقارنة الناتج بالصفر فاذا كان الناتج = صفر دل ذلك على صحة الحسابات واذا كان الناتج لا يساوى صفر دل ذلك على وجود خطأ ما فى الحسابات وفى هذه الحالة يجب اعادة الحسابات مرة أخرى ، انظر شكل رقم (٢٣) .

أولا اتزان الجزء الأيمن

- $\Sigma X = 0.0$, i.e. $X_c - X_b = 0.0$, or $X_c - 6 = 0.0$, $\therefore X_c = 6$ ton .
- $\Sigma Y = 0.0$, i.e. $Y_b - Y_c - 4 = 0.0$, or $11 - 4 = Y_c$, $\therefore Y_c = 7$ ton .

ثانيا اتزان الجزء الأيسر

يتم عكس مركبتى رد الفعل (Xc , Yc) على الجزء الأيسر مع الأخذ فى الاعتبار الحمل المركز عند المفصل (C) ، لتصبح بذلك مركبتى رد الفعل المؤثرة على الجزء الأيسر هى المركبة الأفقية = ٦ طن الى اليسار والمركبة الرأسية = ٧ – ٥ = ٢ طن الى أعلى ، كما فى شكل (٢٣) . وبأخذ مجموع العزوم حول الركيزة (A) للتحقق من النتائج .

- Check

  $\Sigma M @ A = 18 * 3 - 2 * 6 - 6 * 7 = 0.0 \quad \therefore$ O.K.

مثال على الكابلات (Cables)

مثال ٨

للكابل الموضح بالشكل رقم (٢٤) ، المطلوب ايجاد مركبات ردود الأفعال الخارجية عند نقطتى تعليق الكابل (A , B) نتيجة للأحمال الموضحة بالشكل ، وكذلك ترخيم الكابل (Sag) عند النقطتين (D , E) ، علما بأن الترخيم (Sag) عند نقطة (C) = ٦ متر.

الحل

بأخذ مجموع العزوم عند نقطة التعليق (A) وذلك لايجاد أول معادلة فى مركبتى رد الفعل عند نقطة التعليق (B) ، وبأخذ العزوم عند نقطة (C) ناحية اليمن ونساويه بالصفر، يمكن ايجاد معادلة ثانية فى نفس مركبتى رد الفعل عند (B) وبحل هاتين المعادلتين آنيا نوجد مركبتى رد الفعل (Xb , Yb) ، وبتطبيق شرطى الاتزان الآخرين - مجموع القوى الأفقية و الرأسية = صفر - نوجد مركبتى رد الفعل عند نقطة التعليق (A) . ولايجاد القوى الداخلية فى أجزاء الكابل المختلفة ، يتم دراسة اتزان نقاط تعليق الأحمال (C , D , E) ، وعند كل نقطة تعليق يتم تطبيق شرطى الاتزان الأفقى الرأسى (مجموع مركبات القوى الأفقية والرأسية =

صفر) ، وبمجرد ايجاد مركبتى القوة فى أى جزء من الكابل يتم ايجاد القوة المحصلة فى أى جزء باستخدام العلاقة الآتية : -

$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$

وعلى هذا تكون خطوات الحل كالآتى : -

أولا : ايجاد ردود الأفعال عند نقاط تعليق الكابل

- $\Sigma M @ A = 0.0$

  i.e., $\Sigma M @ A = 5 * 3 + 10 * 9 + 8 * 15 - 18 * Yb + 3 * Xb = 0.0$

  $\therefore 75 - 6\ Yb + Xb = 0.0$ .... (1)

- Mc right = 0.0

  Mc right = 10 * 6 + 8 * 12 – Yb * 15 +Xb * 7 = 0.0

  $\therefore 156 - 15\ Yb + 7\ Xb = 0.0$ .... (2)

وبحل المعادلتين (1,2) ينتج الآتى : -

Xb = 9 ton , Yb = 14 ton .

- $\Sigma X = 0.0$, $\therefore$ Xa = 9 ton .
- $\Sigma Y = 0.0$, $\therefore$ Ya = 9 ton .

ثانيا : ايجاد الترخيم عند نقاط تعليق الأحمال

ولايجاد الترخيم (Sag) عند نقطة (D) ، نأخذ العزم عند (D) من ناحية اليمين ونساويه بالصفر .

- Md right = 0.0 , i.e. Md right = 8 * 6 + 9 * Sd – 14 * 9 = 0.0 , $\therefore$ Sd = 8.667 m .

ولايجاد الترخيم (Sag) عند نقطة (E) ، نأخذ العزم عند (E) من ناحية اليمين ونساويه بالصفر .

- Me right = 0.0 , i.e. Me right = 9 * Se – 14 * 3 = 0.0 , $\therefore$ Se = 4.667 m .

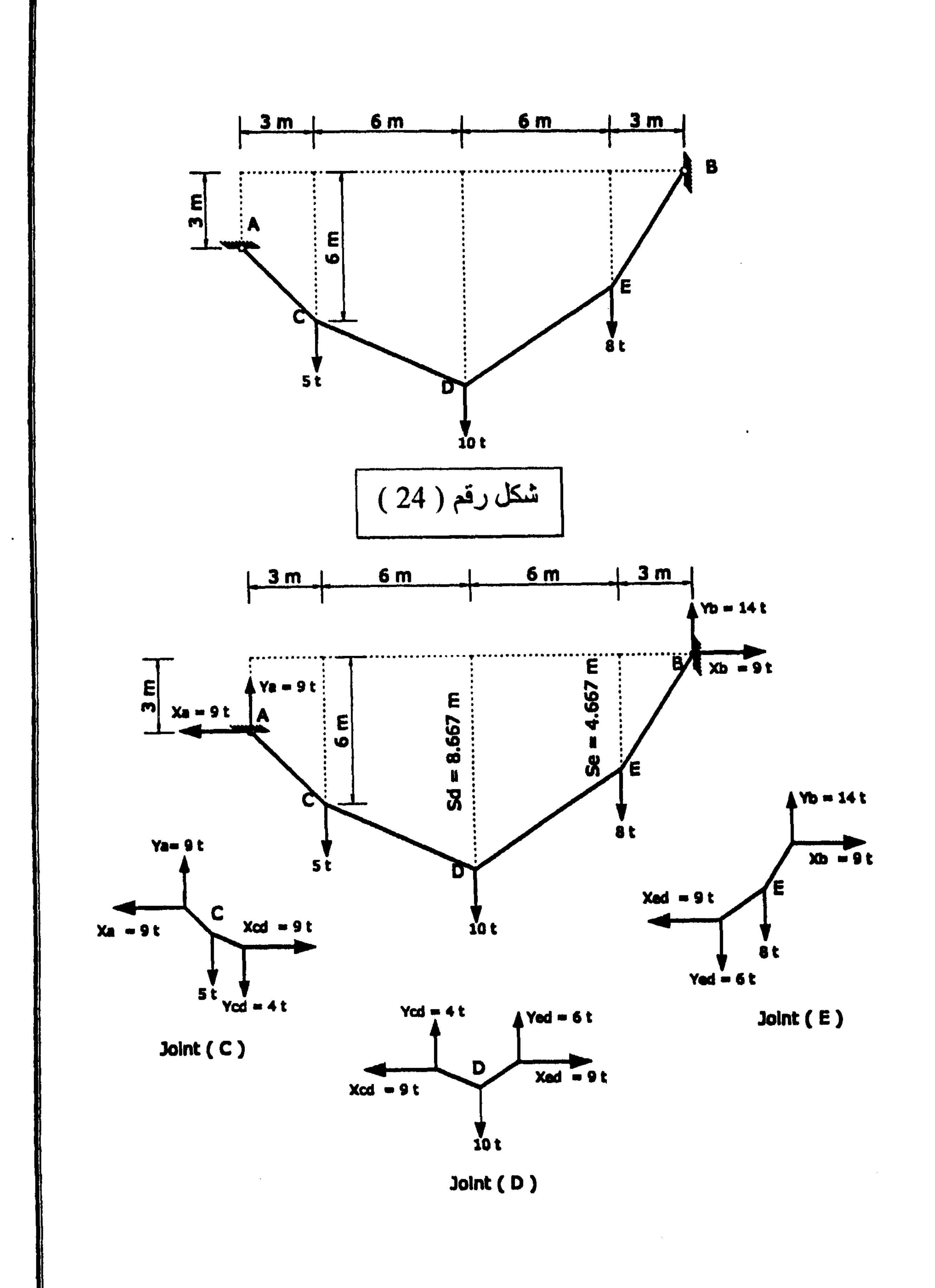
ثالثا : ايجاد القوى الداخلية فى الأجزاء المختلفة فى الكابل

$Fac = \sqrt{Xa^2 + Ya^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} = 12.73$ ton

$Feb = \sqrt{Xb^2 + Yb^2} = \sqrt{9^2 + 14^2} = 16.64$ ton

$Fcd = \sqrt{Xcd^2 + Ycd^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} = 9.85$ ton

$Fde = \sqrt{Xde^2 + Yde^2} = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10.82$ ton


3 m
6 m
6 m
3 m
A
B
C
D
E
5 t
10 t
8 t
شكل رقم (24)
Yb = 14 t
Xb = 9 t
Ya = 9 t
Xa = 9 t
Sd = 8.667 m
Se = 4.667 m
Xcd = 9 t
Ycd = 4 t
Joint (C)
Yed = 6 t
Xed = 9 t
Joint (D)
Joint (E)

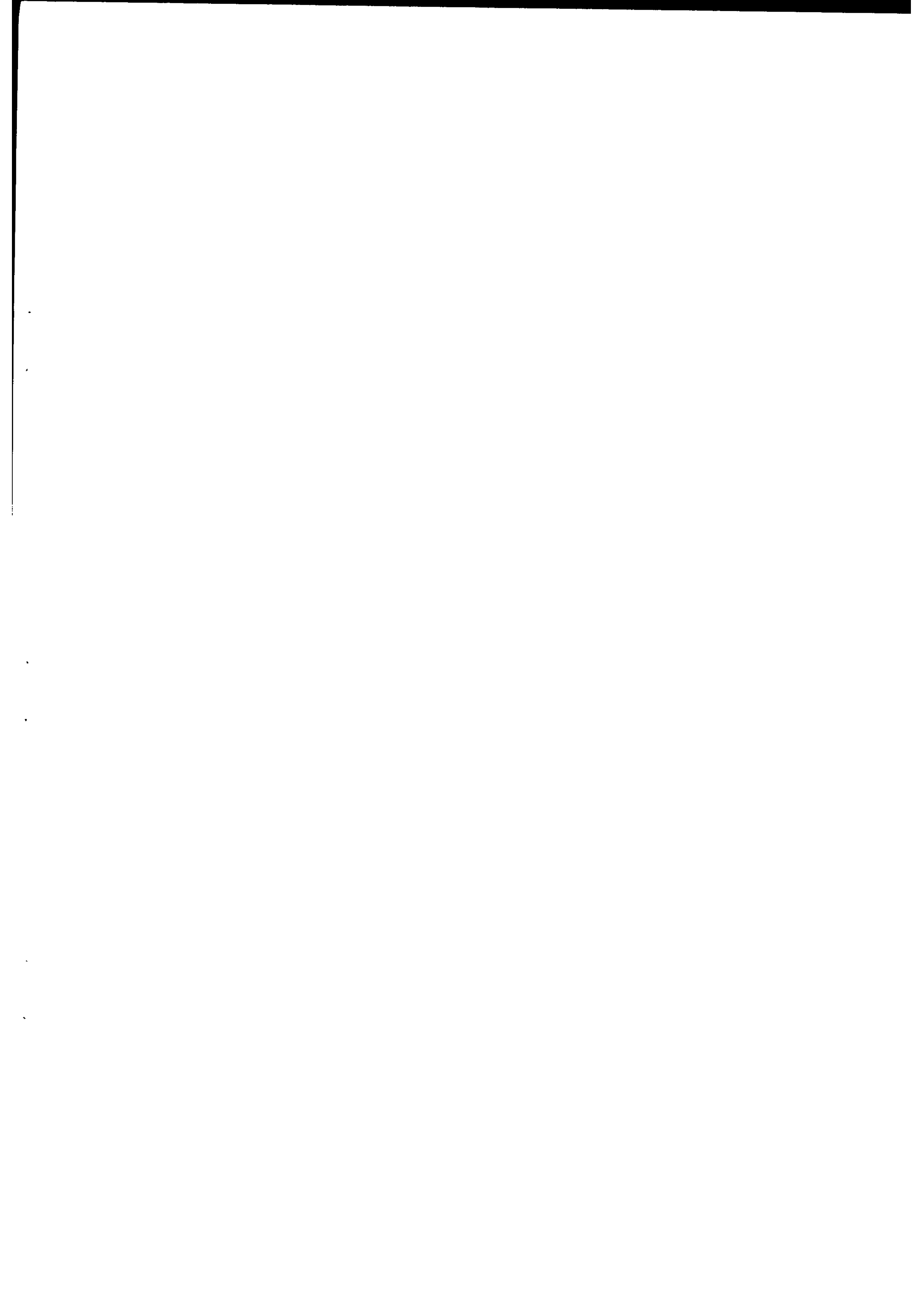


المحددة استاتيكيا

الفصل الثانى
مؤثرات الاجهاد الداخلى للمنشآت ذات المحور الأفقى

<u>تأليف</u>

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى



مؤثرات الاجهاد الداخلى

مقدمة

عند دراسة وتصميم أى منشأ لابد من ايجاد القوى الداخلية عند أى قطاع وهذه القوى الداخلية هى القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء ، وتعرف هذه القوى الداخلية بمؤثرات الاجهاد الداخلى (Internal Straining Actions) ، كما ذكر فى الفصل الأول . ولكى نوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند أى قطاع على محور المنشأ ، نتبع الخطوات الآتية (ذكر ذلك تفصيلا فى الفصل الأول) : -

١. يتم تحليل القوى المائلة الى مركبتين احداهما أفقية والأخرى رأسية وذلك حتى يتم تطبيق شرطى الاتزان الأفقى والرأسى .
٢. يتم استبدال أى حمل موزع بحمل مركز مكافئ له ويؤثر فى مركز ثقل الحمل الموزع .
٣. نوجد ردود الأفعال الخارجية وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة والسابق ذكرها فى الفصل الأول .
٤. يتم تحديد عدة قطاعات على محور المنشأ وذلك لايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عندها وذلك بغرض الوصول الى القطاعات الحرجة والتى تكون عندها مؤثرات الاجهاد الداخلى أكبر ما يمكن ، وعادة تكون هذه القطاعات عند التغيير المفاجئ فى قيمة الدالة ويحدث ذلك عند وجود حمل مركز أو عزم مركز أو قد تكون هذه القطاعات عند القيم الدنيا أو القصوى لبعض الدوال فى حالة الأحمال الموزعة .
٥. يتم فصل المنشأ الى جزءين منفصلين عند القطاع المراد ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عنده ويسمى كل جزء من هذين الجزءين بجزء حر الحركة (Free-body-diagram) ، ويتم دراسة اتزان كل جزء على حدة وذلك بتطبيق شروط الاتزان عليه .
٦. يتم رسم شكل دوال مؤثرات الاجهاد الداخلى (**شكل القوى العمودية وشكل قوى القص وشكل عزوم الانحناء**) ، وذلك على طول محور المنشأ .

ولكى يتم ذلك فى سهولة ويسر سوف نبدأ بدراسة أبسط أنواع المنشآت وهو الكابولى وذلك لاستنباط القواعد الأساسية ثم يتم تعميمها بعد ذلك على بقية المنشآت .

أولا : حالة حمل مركز واحد

الشكل رقم (١) يوضح كابولى أفقى ويؤثر عليه حمل مركز قيمته (F) عند الطرف الحر (A) وتكون مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (S-S) والذى يبعد عن الطرف الحر للكابولى بمسافة (x) ، كالآتى :-

- القوة العمودية تساوى صفر ، وذلك لعدم وجود قوى موازية لمحور المنشأ .
- $N_S = 0.0$
- قوة القص عند هذا القطاع تساوى (F) واشارتها سالبة لأنها تحدث دورانا ضد عقارب الساعة .
- $Q_S = -F$
- عزم الانحناء عند هذا القطاع يساوى القوة (F) مضروبة فى المسافة العمودية (x) واشارتها سالبة لأنها تحدث انحناءا (تقوسا) الى أعلى .
- $M_S = -F.x$

من العلاقات السابقة نلاحظ أن قيمة القوة العمودية تساوى صفر وهى قيمة ثابتة مهما كان موضع القطاع وعلى هذا فان شكل القوى العمودية سوف يكون منطبقا على خط القاعدة (Datum Line) ، كما نلاحظ أن قيمة القص أيضا ثابتة وتساوى (F-) وعلى هذا فان شكل القص يكون هو الآخر ثابت ولكى نرسم شكل قوى القص نرسم خطا يوازى خط القاعدة ويبعد عنه بمقدار (F) الى أسفل حيث أن القص سالب ويتم تهشير (تظليل) المساحة المحصورة بين خط القاعدة والخط الموازى له والذى يمثل دالة القص ويكون اتجاه التظليل عموديا على خط القاعدة ويتم كتابة الاشارة داخل المساحة المظللة ، وأخيرا نلاحظ أن قيمة عزم الانحناء تعتمد على المسافة (x) – بعد القطاع عن الطرف الحر للكابولى - وهى علاقة خطية وبذلك يكون شكل عزوم الانحناء من الدرجة الأولى (خط مستقيم مائل) ولكى يتم رسم هذا الخط نختار قطاعين على محور المنشأ ونحسب

قيمتى عزم الانحناء عندهما وبعد ذلك نوقع هاتين النقطتين ونصل بينهما بخط مستقيم ، وعادة يكون هذان القطاعان هما بداية ونهاية المنشأ ، أى عند ($x = L$, $x = 0.0$) وذلك على النحو التالى :

- For $x = 0.0$, $M_S = 0.0$
- For $x = L$, $M_S = - F.L$

والشكل رقم (١) يوضح أشكال القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء .

ثانيا : حالة حملين مركزين (F_1 , F_2) .

الشكل رقم (٢) يوضح كابولى أفقى ، يؤثر عليه حملان مركزان هما (F_1 , F_2) ، ولكى يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذا الكابولى ، سوف يتم تقسيم هذا الكابولى الى ثلاثة أجزاء - (AB , BC , & CD) – وذلك على النحو التالى : -

أ- الجزء الأول (AB) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($0.0 \leqslant x \leqslant a$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0$, $Q_S = 0.0$, $M_S = 0.0$

ب- الجزء الثانى (BC) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($a \leqslant x \leqslant b$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0$, $Q_S = - F_1$, $M_S = - F_1 * (x – a)$

ج- الجزء الثالث (CD) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($b \leqslant x \leqslant L$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0$,
- $Q_S = - F_1 – F_2 = - (F_1 + F_2)$,
- $M_S = - F_1 * (x – a) – F_2 * (x – b)$

من العلاقات السابقة نلاحظ الآتى : -

١. قيمة القوى العمودية ثابتة وتساوى صفر .
٢. دالة قوى القص ثابتة فى كل جزء على حدة وتختلف فى القيمة فى الأجزاء المختلفة ، أى أن شكل القص يكون شكلا مدرجا .
٣. شكل عزوم الانحناء عبارة عن دالة من الدرجة الأولى (خط مستقيم) ، ولكن ميل هذا الخط يختلف من جزء الى آخر ، ولكى نرسم شكل عزوم الانحناء نوجد قيمة العزم عند بداية ونهاية طل جزء مع ملاحظة أن نقطة (B) هى نهاية الجزء الأول وفى نفس الوقت بداية الجزء الثانى ، لذلك نجد أن قيمة العزم المحسوب عند (B) سواء من الجزء الأول أو الثانى تكون واحدة ، وكذلك عند نقطة (C) وعلى هذا تكون قيم العزوم كما يلى : -

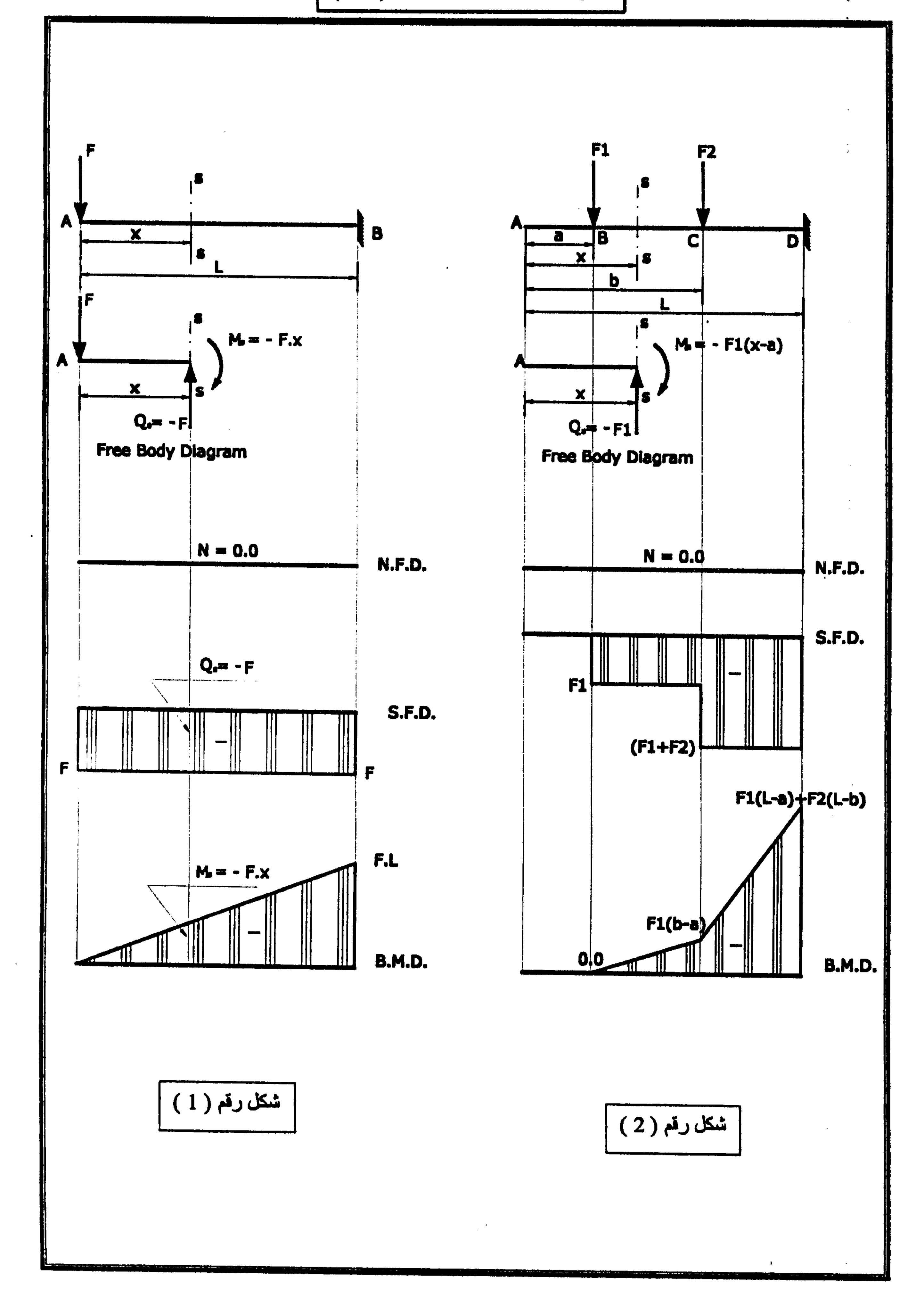
الجزء الأول : ($Mb = 0.0$, $Ma = 0.0$) .

الجزء الثانى : لايجاد العزم عند نقطة (B) نضع ($x = a$) فى معادلة العزوم الخاصة بهذا الجزء وذلك على النحو التالى : -

$$Mb = - F_1 * (x – a) = - F_1 * (a – a) = 0.0$$

وهى نفس النتيجة السابق حسابها من الجزء الأول ، ولايجاد العزم (C) نضع ($x = b$) فى معادلة العزوم الخاصة بهذا الجزء كما يلى : -

$$Mc = - F_1 * (x – a) = - F_1 * (b – a)$$



شكل رقم (1)

شكل رقم (2)

الجزء الثالث : لايجاد العزم عند نقطة (C) نضع (x = b) فى معادلة العزوم الخاصة بهذا الجزء وذلك على النحو التالى : -

$$Mc = -F_1 * (x-a) - F_2 * (x-b) = -F_1 * (b-a) - F_2 * (b-b)$$

$$\text{i.e. } Mc = -F_1 * (b-a)$$

وهى أيضا نفس القيمة السابق حسابها فى الجزء الثانى ، ولايجاد العزم عند (D) نضع (x = L) فى نفس المعادلة السابقة كما يلى : -

$$Md = -F_1 * (x-a) - F_2 * (x-b) = -F_1 * (L-a) - F_2 * (L-b)$$

وبعد حساب قيم القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء عند القطاعات المختلفة ، يتم رسم مؤثرات القوى الداخلية كما بالشكل رقم (٢) . وبامعان النظر الى أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى فى هذه الحالة نلاحظ الآتى : -

١. أنه عند كل حمل مركز يحدث تغيير مفاجئ فى قيمة القص وهذا التغيير المفاجئ يساوى قيمة هذا الحمل المركز ، كما نلاحظ أن شكل القص يتدرج - اذا تحركنا من اليسار الى اليمين - تبعا لاتجاه الأحمال المركزة صعودا أو نزولا ، واذا تحركنا من اليمين الى اليسار فان شكل القص يتدرج عكس اتجاه القوى المركزة .
٢. أن شكل عزوم الانحناء يكون شكلا مضلعا ويتم رسم هذا الشكل المضلع بايجاد قيم عزوم الانحناء عند بداية ونهاية المنشأ وعند كل حمل مركز ثم يتم توصيل كل نقطة بالتى تليها بخط مستقيم .
٣. أن قيمة القص بين أى حملين مركزين تكون ثابتة ، وأن شكل عزم الانحناء بين أى حملين مركزين عبارة عن خط مستقيم ميله ثابت وهذا الميل يساوى قيمة القص بين هذين الحملين ويعرف هذا الميل رياضيا بمعدل التغير فى قيمة العزوم ففى شكل رقم (٢) نلاحظ أن ميل خط العزم فى الجزء (CD) مثلا يساوى قيمة القص فى هذا الجزء (Qcd) كما يلى : -

$$-\left\{\frac{[F_1(L-a)+F_2(L-b)]-F_1(b-a)}{(L-b)}\right\} = -\left\{\frac{[F_1(L-b)+F_2(L-b)]}{(L-b)}\right\} = -(F_1+F_2) = Qcd$$

ويمكن التعبير عن العلاقة السابقة على شكل علاقة تفاضلية كما يلى : -

$$dM / dx = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث (dM / dx) هى معدل تغير عزم الانحناء عند أى قطاع (ميل المماس لشكل عزوم الانحناء عند هذا القطاع) ، وهو يساوى قيمة القص (Q) عند نفس القطاع .
واذا وضعنا المعادلة (1) على الصورة : -

$$dM = Q \,.\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

فانه يمكن كتابة هذه الصورة - معادلة رقم (2) - فى صورة تكامل محدد بين قطاعين متجاورين (1 , 2) مثلا و يبعد القطاع الأول عن نقطة الأصل بمقدار (x1) والقطاع الثانى يبعد عن نقطة الأصل بمقدار (x2) ، وقيمة عزم الانحناء عند القطاع الأول (M_1) وعزم الانحناء عند القطاع الثانى (M_2) على النحو التالى : -

$$\int_{M1}^{M2} dM = \int_{x1}^{x2} Q.dx \quad \text{or} \quad M_2 - M_1 = \Delta M = \int_{x1}^{x2} Q.dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

حيث (ΔM) هى التغير فى قيمة عزم الانحناء بين القطاعين (2 , 1) ويكون تكامل القص بين هذين القطاعين هو عبارة عن مساحة القص بينهما ، وعلى هذا فان المعادلة (3) تعنى أن الفرق بين قيمتى عزم الانحناء عند أى قطاعين يساوى مساحة شكل القص بين هذين القطاعين – هذا اذا كان اتجاه الحساب من اليسار الى اليمين أما اذا كان اتجاه الحساب من اليمين الى اليسار ، فان فرق قيمتى العزم يساوى مساحة القص باشارة سالبة .

ففى الحالة السابقة نلاحظ أن فرق العزوم بين القطاعين عند النقطتين (C , D) هو : -

$$\Delta M = -(F_1 * (L-a) + F_2 * (L-b) - F_1 * (b-a)) \quad , \quad or$$

$$\Delta M = -(F_1 + F_2) * (L-b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\int_{x1}^{x2} Q.dx = \text{Shear area from point C to point D} \quad , \quad or$$

$$\int_{x1}^{x2} Q.dx = -(F_1 + F_2) * (L-b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبمقارنة المعادلتين (5 , 4) نجد أن هناك تطابقا تاما .

ولقاعدة فرق العزوم أهمية كبيرة فى حساب العزوم من مساحة القص ، حيث يمكن ايجاد قيمة العزوم عند النقاط المتتالية وذلك باضافة مساحة القص الى العزم السابق لنحصل على قيمة العزم التالى وذلك اذا كان اتجاه الحساب من اليسار الى اليمين ، أو طرح مساحة القص اذا كان الحساب من اليمين الى اليسار .

ثالثا : حالة عزم مركز يؤثر على كابولى

الشكل رقم (٣) يوضح كابولى يؤثر عليه عزم مركز قيمته (M) عند نقطة (C) ولايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى نتيجة لهذا العزم ، يتم تقسيم الكابولى الى جزءين الأول (AC) والثانى (CB) وذلك على النحو التالى : -

أ- الجزء الأول (AC) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($a \geqslant x \geqslant 0.0$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0 \quad , \quad Q_S = 0.0 \quad , \quad M_S = 0.0$

ب- الجزء الثانى (CB) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($L \geqslant x \geqslant a$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

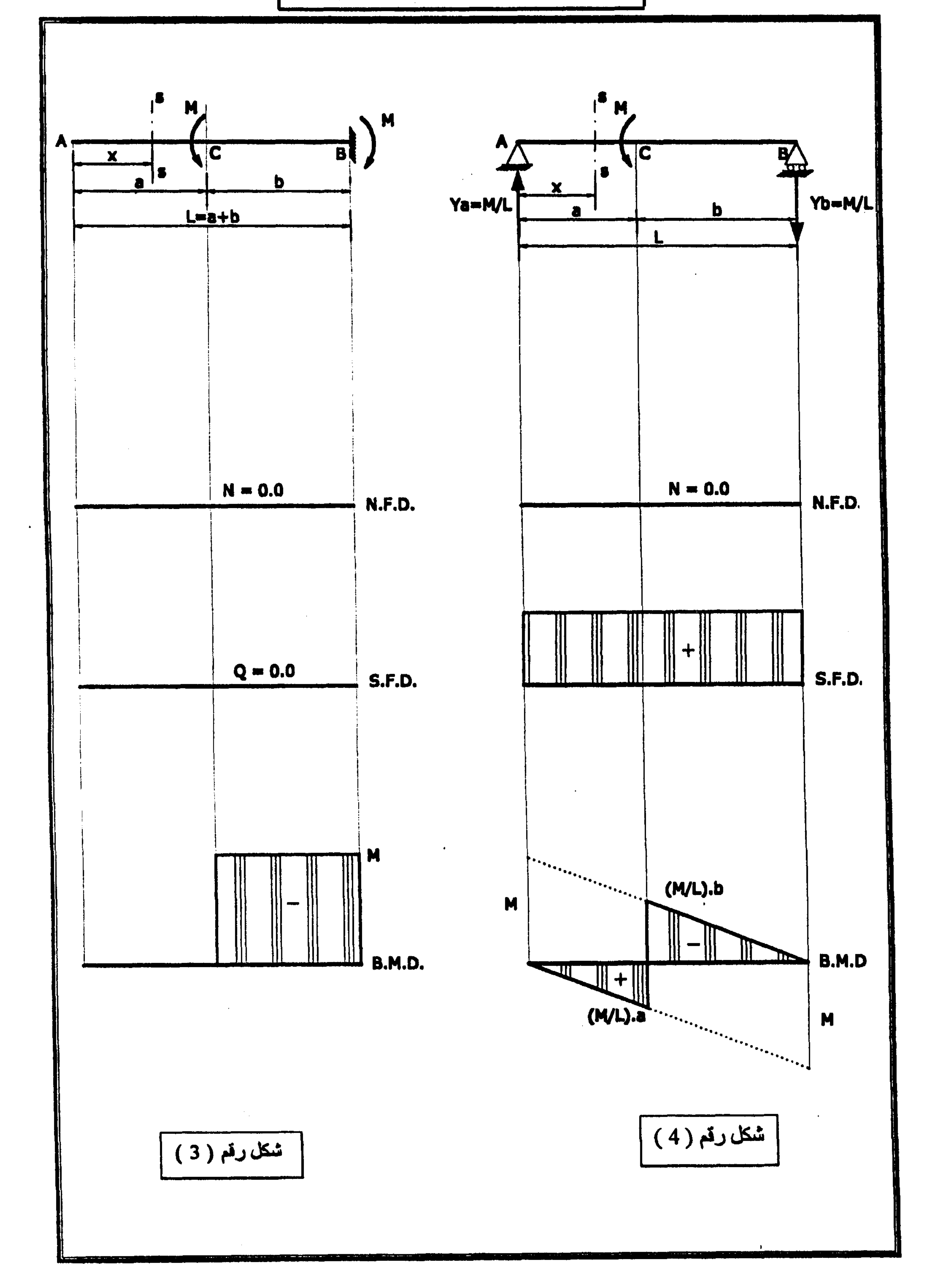
- $N_S = 0.0 \ , \ Q_S = -F_1 \ , \ M_S = -M$

نلاحظ فى هذه الحالة أن وجود العزم المركز على الكابولى لايؤثر على القوى العمودية أو قوى القص ولكن يحدث تغير مفاجئ فى قيمة عزوم الانحناء عند النقطة (C) – مكان تأثير العزم المركز – وهذا التغير المفاجئ يساوى قيمة العزم المركز ، انظر شكل رقم (٣) .

رابعا : حالة عزم مركز يؤثر على كمرة بسيطة

الشكل رقم (٤) يوضح كمرة بسيطة يؤثر عليها عزم مركز قيمته (M) عند نقطة (C) ، والمطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

نلاحظ فى هذه الحالة أن وجود العزم المركز (M) نتج عنه ردى فعل عند الركيزتين (A , B) متساويان فى القيمة ومتضادان فى الاتجاه وذلك حتى يتحقق شرط الاتزان الرأسى ($\Sigma Y = 0.0$) ، وقيمة كل منهما (M / L) ، ويتم تقسيم الكمرة الى جزءين الأول (AC) والثانى (CB) وذلك على النحو التالى : -



شكل رقم (3)

شكل رقم (4)

أ- الجزء الأول (AC) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($0.0 \leqslant x \leqslant a$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0$, $Q_S = M / L$, $M_S = (M / L) * x$

نلاحظ فى هذا الجزء أن القوى العمودية ثابتة وتساوى صفر ، وقوى القص أيضا ثابتة وتساوى (M / L) ، وعزوم الانحناء عبارة عن دالة من الدرجة الأولى (خط مستقيم) ويتم رسمه على النحو التالى : -

For $x = 0.0$, $M_A = 0.0$

For $x = a$, $M_C = (M / L) * a$

ب- الجزء الثانى (CB) ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) حيث ($a \leqslant x \leqslant L$) ونوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند هذا القطاع على النحو التالى : -

- $N_S = 0.0$, $Q_S = M / L$, $M_S = (M / L) * x - M$

بالنظر الى العلاقات السابقة نجد أن قيم القوى العمودية وقوى القص لم يطرأ عليها أى تغيير ، أما قيم عزوم الانحناء فهى أيضا دالة من الدرجة الأولى ولكن بقيم مختلفة عن القيم السابقة ويتم رسم عزوم هذا الجزء كما يلى : -

For $x = a$, $M_C = (M / L) * a - M = - M * (L - a) / L = - (M / L) * b$

For $x = L$, $M_B = (M / L) * L - M = 0.0$

وبمقارنة قيم العزوم عند نقطة (C) – مكان تأثير العزم المركز – نلاحظ أن الفرق بين عزمى الانحناء على يمين (C) مباشرة وعلى يسارها مباشرة يساوى قيمة العزم المركز (M) ، أى أنه حدث تغير مفاجئ فى قيمة عزم الانحناء عند مكان تأثير العزم المركز ، أنظر شكل رقم (٤) .

من دراسة الحالات السابقة نستخلص الآتى : -

- **فى حالة الأحمال المركزة تكون قيم القوى العمودية وقوى القص ثابتة بين كل حملين مركزين ويكون شكل القوى العمودية وقوى القص شكلا مدرجا ويحدث تغير مفاجئ فى مكان تأثير الحمل المركز وهذا التغير يساوى قيمة الحمل المركز ، بينما يكون شكل عزوم الانحناء شكلا مضلعا .**
- **فى حالة العزوم المركزة تكون قيم القوى العمودية وقوى القص ثابتة على طول محور المنشأ ، بينما يحدث تغير مفاجئ فى شكل عزوم الانحناء عند مكان تأثير العزم المركز وهذا التغير يساوى قيمة العزم المركز .**

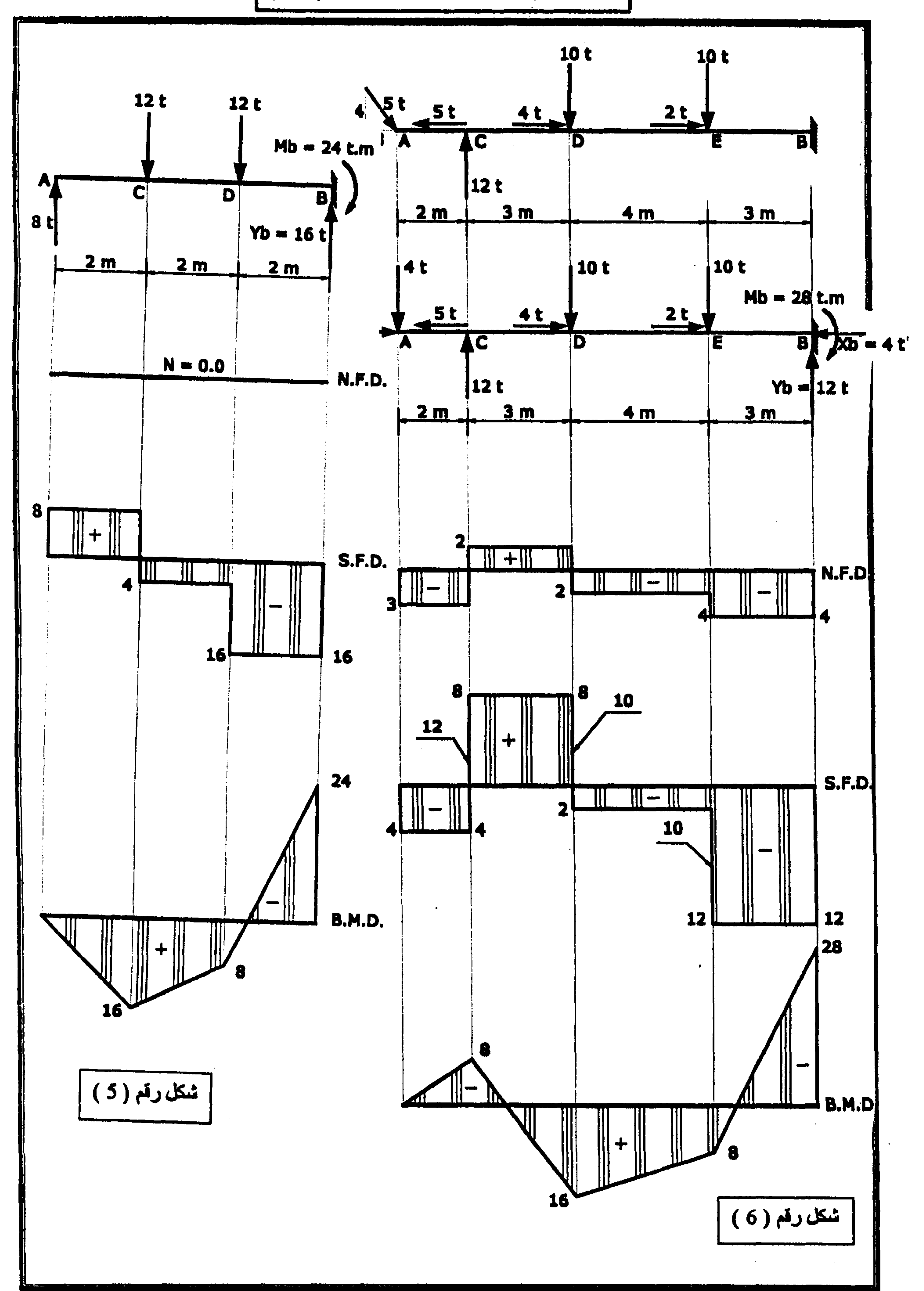
<u>أمثلة عددية على الأحمال المركزة والعزوم المركزة</u>

مثال ١

الشكل رقم (٥) يوضح كابولى أفقى يؤثر عليه مجموعة من الأحمال المركزة ، والمطلوب رسم أشكال القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء .

الحل

يتم حساب ردود الأفعال الخارجية عند الركيزة المثبتة (B) وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة (انظر الفصل الأول) ، ولرسم شكل مؤثرات الاجهاد الداخلى نتبع الآتى : -



شكل رقم (5)

شكل رقم (6)

أولا القوى العمودية

نلاحظ أنه لاتوجد أية قوى عمودية (N = 0.0) لعدم وجود قوى أفقية وعليه يكون شكل القوى العمودية عبارة عن خط مستقيم منطبق على خط القاعدة .

ثانيا قوى القص

بالنسبة لرسم شكل قوى القص يتم تقسيم الكابولى الى ثلاثة أجزاء على النحو التالى : -

١. الجزء (AC) : بأخذ أى قطاع في هذا الجزء وحساب قيمة القص ، نجد أن قيمة القص تساوى ٨ طن وهى قيمة ثابتة فى هذا الجزء .
٢. الجزء (CD) : باعتبار أى قطاع فى هذا الجزء وحساب قيمة القص ، نجد أن قيمة القص - مجموع القوى الراسية على يمين هذا القطاع أو على يساره - تساوى (٨ – ١٢) ، أى تساوى (- ٤ طن) .
٣. الجزء (DB) : بأخذ أى قطاع فى هذا الجزء نجد أن قيمة القص تساوى (٨ – ١٢ – ١٢) ، أى تساوى (- ١٦ طن) .

وبعد حساب قيم القص فى كل جزء يتم رسم شكل قوى القص باستخدام مقياس رسم مناسب ونلاحظ أنه شكلا مدرجا كما هو موضح بالشكل رقم (٥) ، كما يمكن رسم شكل قوى القص بطريقة أسهل وذلك بأن نبدأ الرسم من اليسار بالقيمة صفر ونتحرك مع الأحمال صعودا ونزولا (باضافة أو طرح قيمة كل حمل يقابلنا على القيمة السابقة لنحصل على القيمة التالية) حتى نصل الى الطرف الأخر وعنده تكون القيمة أيضا صفر .

ثالثا عزوم الانحناء

لرسم شكل عزوم الانحناء ، نوجد قيم عزوم الانحناء عند بداية ونهاية الكابولى وكذلك عند أماكن الأحمال المركزة وهى نقطتى (C , D) وذلك على النحو التالى : -

Ma = 0.0

Mc = 8 * 2 = 16 t.m

Md = 8 * 4 – 12 * 2 = 8 t.m

Mb = 8 * 6 – 12 * 4 – 12 * 2 = - 24 t.m

وبتوقيع هذه القيم بمقياس رسم مناسب وتوصيل كل نقطة بالتى تليها نحصل على شكلا مضلعا وهذا الشكل يمثل شكل عزوم الانحناء ، شكل رقم (٥) .

مثال ٢

الشكل رقم (٦) يوضح كابولى أفقى يؤثر عليه مجموعة من الأحمال المركزة ، والمطلوب رسم أشكال القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء .

الحل

يتم حساب ردود الأفعال الخارجية عند الركيزة المثبتة (B) - وذلك بعد تحليل القوة المركزة المائلة (٥ طن) عند الطرف الحر (A) الى مركبتين احداهما أفقية (٣ طن) والأخرى راسية (٤ طن) - وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة (انظر الفصل الأول) ، ولرسم شكل مؤثرات الاجهاد الداخلى نتبع الآتى : -

أولا : القوى العمودية

يتم تقسيم الكابولى الى أربعة أجزاء (AC , CD , DE , EB) ونوجد قيمة القوة العمودية فى كل جزء على حدة وهى قيمة ثابتة فى الجزء الواحد وذلك لأن الأحمال المؤثرة أحمالا مركزة وبالتالى يكون شكل القوى العمودية شكلا مدرجا ، وذلك على النحو التالى : -

Nac = - 3 ton .

Ncd = - 3 + 5 = 2 ton .

Nde = - 3 + 5 – 4 = - 2 ton .   or Nde = 2 – 4 = - 2 ton .

Neb = - 3 + 5 – 4 – 2 = - 4 ton .   or Neb = - 2 – 2 = - 4 ton .

كما يمكن رسم شكل القوى العمودية بطريقة أسرع وذلك بأن نبدأ من اليسار بالقيمة صفر ونصعد أو نهبط عند كل حمل أفقى مركز وذلك حسب تأثير الحمل (شدا أو ضغطا) حتى نصل الى نهاية الكابولى وننتهى بالقيمة صفر أيضا انظر شكل رقم (٦) .

ثانيا : قوى القص

يتم رسم شكل قوى القص كما فى المثال رقم (١) وذلك بعد حساب قيم القص فى الأجزاء المختلفة للكابولى وهى على النحو التالى : -

Qac = - 4 ton .

Qcd = - 4 + 12 = 8 ton .

Qde = - 4 + 12 – 10 = - 2 ton . or Qde = 8 –10 = - 2 ton .

Qeb = - 4 + 12 – 10 – 10 = -12 ton . or Qeb = -2 –10 = -12 ton .

ثالثا : عزوم الانحناء

يتم رسم شكل عزوم الانحناء كما فى المثال رقم (١) وذلك بعد حساب قيم العزوم فى بداية ونهاية الكابولى وعند مكان تأثير كل حمل مركز وهى على النحو التالى : -

Ma = 0.0

Mc = - 4 * 2 = - 8 t.m.

Md = 12 * 3 – 4 * 5 = 36 – 20 = 16 t.m.

Me = 12 * 7 – 4 * 9 – 10 * 4 = 8 t.m.

Mb = 12 * 10 – 4 * 12 – 10 * 7 – 10 * 3 = - 28 t.m.

كما يمكن حساب قيم عزوم الانحناء السابقة باستخدام العلاقة التكاملية – فرق العزوم بين نقطتين يساوى مساحة القص المحصورة بين هاتين النقطتين أو بمعنى آخر أن العزم عند أى نقطة يساوى العزم عند النقطة السابقة مضافا اليه مساحة القص بين النقطتين اذا كان اتجاه الحساب من اليسار الى اليمين أو مطروحا منه مساحة القص اذا كان اتجاه الحساب من اليمين الى اليسار – وذلك على النحو التالى : -

Ma = 0.0

Mc = 0.0 + (- 4 * 2) = - 8 t.m.

Md = - 8 + 8 * 3 = 16 t.m.

Me = 16 + (- 2 * 4) = 8 t.m.

Mb = 8 + (- 12 * 3) = - 28 t.m.

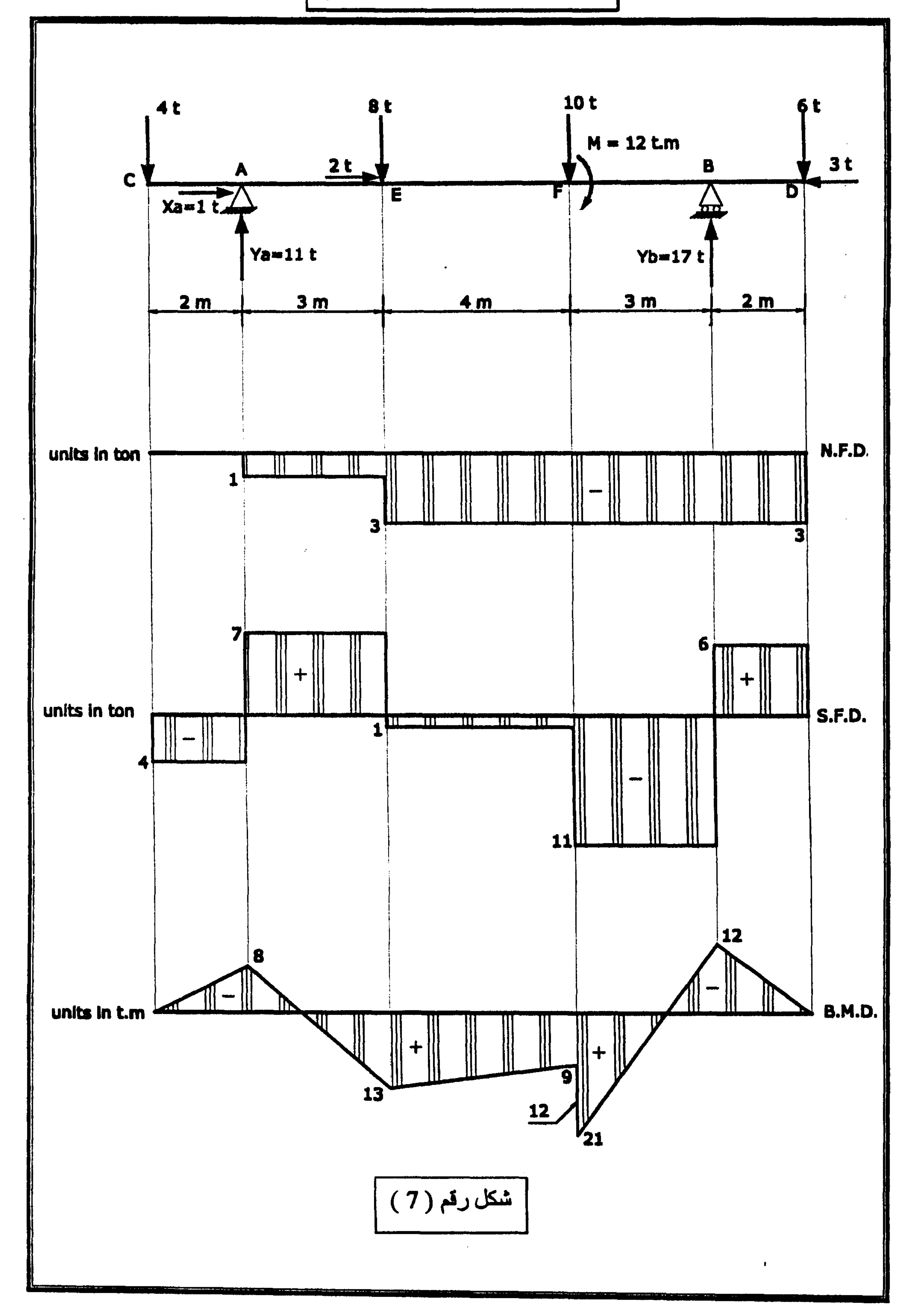
نلاحظ أن هذه القيم هى نفس القيم المحسوبة بالطريقة المعتادة .

مثال ٣

الشكل رقم (٧) يوضح كمرة أفقية ممتدة الأطراف يؤثر عليها مجموعة من الأحمال المركزة بالاضافة الى عزم مركز عند نقطة (F) ، والمطلوب رسم أشكال القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء .

الحل

يتم حساب ردود الأفعال الخارجية عند الركيزتين (A , B) وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة (انظر الفصل الأول) ، ولرسم شكل مؤثرات الاجهاد الداخلى نتبع الآتى : -



4 t
8 t
10 t
6 t
M = 12 t.m
2 t
3 t
C
A
E
F
B
D
Xa=1 t
Ya=11 t
Yb=17 t
2 m
3 m
4 m
3 m
2 m
units in ton
N.F.D.
1
3
3
7
6
units in ton
S.F.D.
4
1
11
8
12
units in t.m
B.M.D.
13
9
12
21

شكل رقم (7)

أولا : القوى العمودية

يتم تقسيم الكمرة الى ثلاثة أجزاء (CA , AE , ED) ونوجد قيمة القوة العمودية فى كل جزء على حدة وهى قيمة ثابتة فى الجزء الواحد وذلك لأن الأحمال المؤثرة أحمالا مركزة وبالتالى يكون شكل القوى العمودية شكلا مدرجا ، وذلك على النحو التالى : -

$N_{ca} = 0.0$

$N_{ae} = -1$ ton .

$N_{ed} = -1 - 2 = -3$ ton .

ثانيا : قوى القص

يتم رسم شكل قوى القص كما فى المثالين السابقين وذلك بعد حساب قيم القص فى الأجزاء المختلفة للكمرة وهى على النحو التالى : -

$Q_{ca} = -4$ ton .

$Q_{ae} = -4 + 11 = 7$ ton .

$Q_{ef} = 7 - 8 = -1$ ton .

$Q_{fb} = -1 - 10 = -11$ ton .

$Q_{bd} = -11 + 17 = 6$ ton .

ثالثا : عزوم الانحناء

يتم رسم شكل عزوم الانحناء كما فى المثالين السابقين وذلك بعد حساب قيم العزوم فى بداية ونهاية الكمرة وعند مكان تأثير كل حمل مركز وعن يمين و يسار العزم المركز وهى على النحو التالى : -

$M_c = 0.0$

$M_a = -4 * 2 = -8$ t.m.

$M_e = 11 * 3 - 4 * 5 = 33 - 20 = 13$ t.m.

$M_{f\,left} = 11 * 7 - 4 * 9 - 8 * 4 = 9$ t.m.

$M_{f\,right} = 17 * 3 - 6 * 5 = 21$ t.m. or $M_{f\,right} = M_{f\,left} + 12 = 9 + 12 = 21$ t.m.

$M_b = -6 * 2 = -12$ t.m.

$M_d = 0.0$

كما يمكن حساب قيم عزوم الانحناء السابقة باستخدام العلاقة التكاملية كما فى مثال (٢) وذلك على النحو التالى : -

$M_c = 0.0$

$M_a = 0.0 + (-4 * 2) = -8$ t.m.

$M_e = -8 + 7 * 3 = 13$ t.m.

$M_{f\,left} = 13 + (-1 * 4) = 9$ t.m.

$M_{f\,right} = 9 + 12 = 21$ t.m.

$M_b = 21 + (-11 * 3) = -12$ t.m.

$Md = -12 + 6 * 2 = 0.0$

نلاحظ فى هذا المثال أيضا أن هذه القيم متطابقة تماما مع القيم المحسوبة بالطريقة المعتادة .

خامسا : حالة حمل موزع بانتظام

الشكل رقم (٨) يوضح كابولى أفقى يؤثر عليه حمل موزع بانتظام كثافته (p t/m) ، والمطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى على طول محور الكابولى .

نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) من الطرف الحر للكابولى كما هو موضح بالشكل رقم (٨) ، ويتم دراسة الجزء من الطرف الحر وحتى القطاع (S - S) وذلك بتطبيق شروط الاتزان عليه بعد استبدال الحمل الموزع بحمل مركز مكافئ له (p.x) ويؤثر فى مركز ثقل هذا الجزء وهو منتصف المسافة (x) وعليه تكون مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (S - S) هى : -

$Ns = 0.0$

$Qs = - p.x$

$Ms = - p.x.x / 2 = - 0.5 * p.x^2$

من العلاقات السابقة نلاحظ أن قيمة القوى العمودية تساوى الصفر وعلى هذا يكون شكل القوى العمودية عبارة عن خط مستقيم منطبق على خط القاعدة ، بينما نجد أن القص عبارة عن دالة خطية – من الدرجة الأولى – (خط مستقيم) ويتم رسمه بتحديد أى نقطتين عليه أو تحديد نقطة وزاوية ميل الخط عند هذه النقطة ، وللسهولة سوف نختار هاتين النقطتين عند بداية ونهاية الحمل الموزع أى عند (x = 0.0 , x = L) وذلك على النحو التالى : -

For $x = 0.0$, $Qa = - p * (0.0) = 0.0$

For $x = L$, $Qb = - p.L$

ويتم رسم شكل القص بتوقيع قيمتى القص عند (A , B) والتوصيل بينهما كما هو موضح بالشكل رقم (٨) .

كما نلاحظ أن قيمة عزوم الانحناء عبارة عن دالة من الدرجة الثانية ولرسم هذه الدالة ينبغى اختيار عدد كافى من النقط وايجاد العزوم عند هذه النقاط ثم رسم منحنى يمر بهذه النقاط ، وجدير بالذكر أنه كلما زاد عدد النقاط كلما كانت دقة الرسم عالية والعكس صحيح على أن لا يقل عدد النقاط عن ثلاث نقاط ، وعموما يمكن رسم هذا المنحنى - بدقة معقولة – بحساب قيمة العزوم عند نقطتين فقط (بداية ونهاية المنحنى) مع رسم مماسين للمنحنى عند هاتين النقطتين ثم يتم رسم المنحنى بحيث يمر بهاتين النقطتين ويمس هذان المماسان . ولايجاد ميل المماس لمنحنى العزم عند أى نقطة يتم تفاضل معادلة العزوم بالنسبة للمتغير (x) وذلك على النحو التالى : -

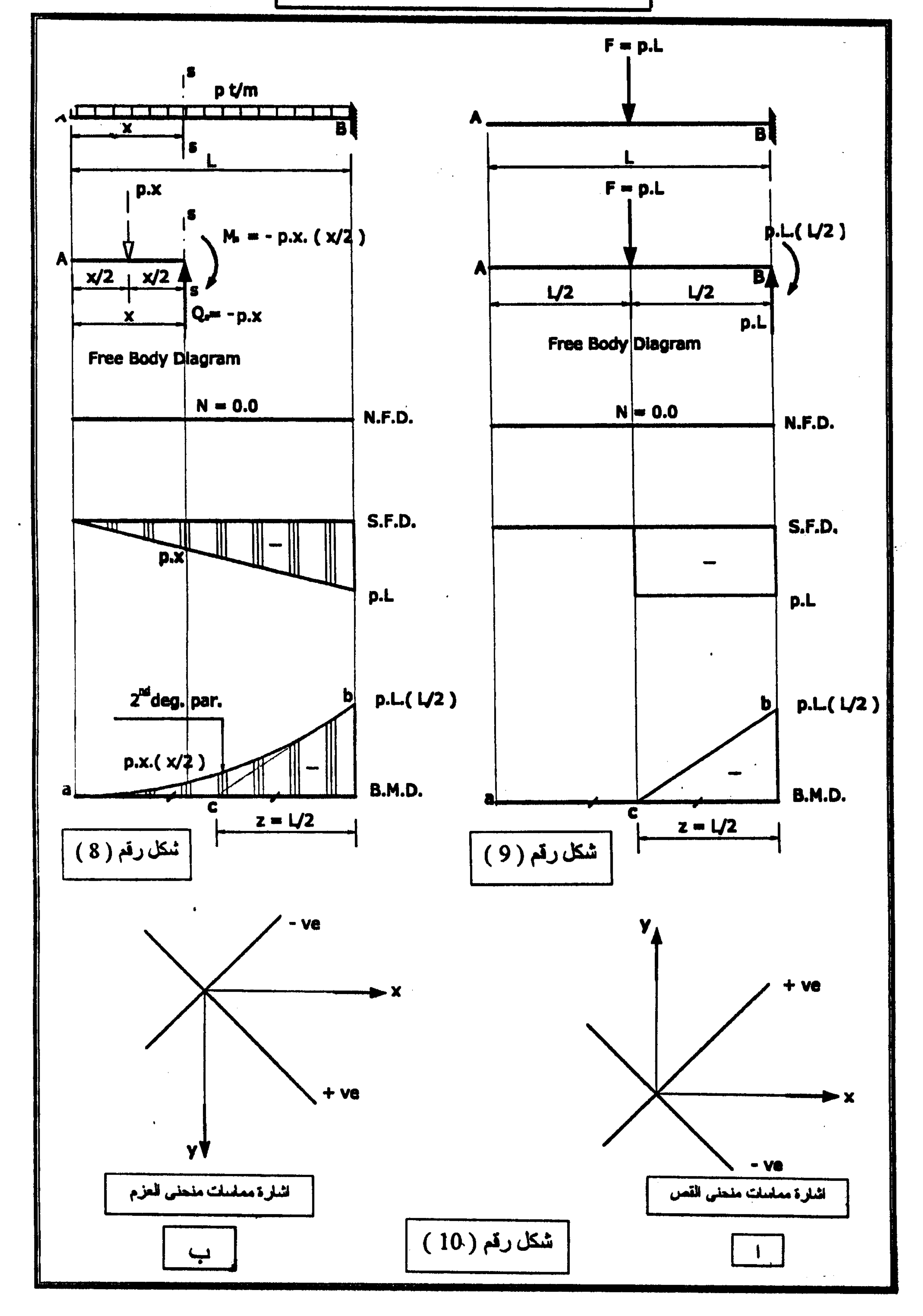
$Mx = - 0.5 * p.x^2$

i.e. $dM / dx = - p.x = Qs$

اى ان ميل المماس لشكل عزوم الانحناء عند أى نقطة يساوى قيمة القص عند نفس النقطة و يتمشى مع ما سبق ذكره مع مراعاة أنه اذا كانت اشارة المماس موجبة يتم رسمه فى الربع الثانى أو الرابع ، واذا كانت اشارة المماس سالبة يتم رسمه فى الربع الأول أو الثالث أنظر الشكل رقم (١٠ - ب) . ولرسم شكل عزوم الانحناء لهذه الحالة سوف نختار نقطتى (A , B) – بداية ونهاية الحمل – لحساب قيم العزوم وميل المماس لشكل العزوم عندهما وذلك على النحو التالى : -

For $x = 0.0$; (Point A) ; $Ma = 0.0$, $dM / dx = 0.0$

For $x = L$; (Point B) ; $Mb = - 0.5 * p.L^2$, $dM / dx = - p.L$



شكل رقم (8)

شكل رقم (9)

شكل رقم (10)

ولرسم المماس عند نقطة (A) ، نلاحظ أن ميله يساوى صفر أى أنه أفقى وحيث أن قيمة العزم عند (A) تساوى صفر لذلك سوف يكون المماس عند (A) منطبقا على خط القاعدة (Datum Line) ، فى حين أن ميل المماس عند نقطة (B) يساوى (p.L -) أى أن ظل الزاوية المحصورة بين هذا المماس والخط الأفقى عند (b) تساوى (p.L -) ، فاذا افترضنا أن هذا المماس يقطع خط القاعدة فى النقطة (c) والتى تبعد عن الطرف المثبت (B) بمقدار المسافة (z) ، حيث يمكن ايجاد المسافة (z) على النحو التالى : -

$$\tan(\phi) = -0.5 * p.L^2 / z = -p.L \quad \text{i.e.} \quad z = L/2$$

أى أن المماس لمنحنى الدرجة الثانية ينصف خط القاعدة ، بعد توقيع قيمتى العزم عند نقطتى البداية والنهاية ورسم المماسين عندهما يتم رسم منحنى العزم بحيث يمر بنقطتى البداية والنهاية ويمس المماسين عندهما ، وعلى هذا تكون أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى كما هو موضح بالشكل رقم (٨) .

ملاحظات على هذه الحالة

١. نلاحظ أن القص من الدرجة الأولى (خط مستقيم) ، أى تزيد درجة عن الحمل حيث أن درجة الحمل تساوى صفر لأنه حمل موزع بانتظام .
٢. نلاحظ أن عزوم الانحناء عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، أى تزيد درجة عن القص ودرجتان عن الحمل .
٣. نلاحظ أن معدل تغير قوى القص (ميل المماس لشكل قوى القص) يساوى كثافة الحمل باشارة سالبة ($dQ / dx = -p$) .
٤. نلاحظ أن معدل تغير عزوم الانحناء (ميل المماس لشكل عزوم الانحناء) عند نقطة ما يساوى قيمة القص عند نفس النقطة ($dM / dx = Q$) .
٥. نلاحظ أيضا أن العلاقات التكاملية بين عزوم الانحناء وقوى القص من ناحية وبين قوى القص والحمل الموزع من ناحية أخرى صحيحة – فرق العزوم بين أى نقطتين يساوى مساحة القص بين هاتين النقطتين وكذلك فرق قوى القص بين أى نقطتين يساوى مساحة شكل الحمل الموزع باشارة سالبة .

رابعا : حالة حمل موزع من الدرجة الأولى (حمل على شكل مثلث)

الكابولى الموضح بالشكل رقم (١١) يؤثر عليه حمل من الدرجة الأولى (حمل مثلثى) ، والمطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذا الكابولى .

باعتبار القطاع (S -S) على بعد (x) من الطرف الحر (A) ، نلاحظ أن كثافة الحمل عند هذا القطاع هى ($f(x) = p.x / L$) وباستبدال الحمل الخطى فى هذا الجزء - من الطرف الحر (A) وحتى القطاع (S - S) - بحمل مركز مكافئ (F_x) حيث : -

$$F_x = 0.5 * f(x) * x = 0.5 * (p.x / L) * x = 0.5 * (p.x^2 / L) .$$

يمكن ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (S -S) على النحو التالى : -

$$Ns = 0.0$$

$$Qs = -F_x = -0.5 * (p.x^2 / L)$$

$$Ms = -F_x * (x / 3) = -p.x^3 / (6 L)$$

واضح من العلاقات السابقة ان القص عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية وعزم الانحناء منحنى من الدرجة الثالثة ، أى أن القص يزيد درجة عن الحمل والعزم يزيد درجة عن القص ودرجتان عن الحمل ، كما ان معدل تغير القص يساوى كثافة الحمل باشارة سالبة ($dQ / dx = -p.x / L$) ومعدل تغير العزم يساوى القص

($dM / dx = - 0.5 * (p.x^2 / L)$) . وكما ذكرنا سابقا يمكن رسم أى منحنى بمعرفة نقطتى البداية والنهاية والمماسين عند هاتين النقطتين وذلك على النحو التالى : -

- **شكل قوى القص**

For $x = 0.0$; (point A) ; $Q = 0.0$, $dQ / dx = 0.0$

For $x = L$; (point B) ; $Q = - 0.5 * (p.L)$, $dQ / dx = - p$

أى انه عند نقطة (A) ، تكون قيمة القص مساوية للصفر وكذلك ميل المماس عندها أيضا يساوى صفر اى أن المماس عند نقطة (A) ينطبق على خط القاعدة وعند نقطة (B) تكون قيمة القص (0.5pL -) وميل المماس يساوى (p -) وكما ذكرنا سابقا فان المماس فى حالة منحنى الدرجة الثانية ينصف خط القاعدة ، وبعد توقيع قيمتى القص عند نقطتى البداية والنهاية ورسم المماسين عندهما يتم رسم منحنى القص بحيث يمر بنقطتى البداية والنهاية ويمس المماسين عندهما .

- **شكل عزوم الانحناء**

For $x = 0.0$; (point A) ; $M = 0.0$, $dM / dx = 0.0$

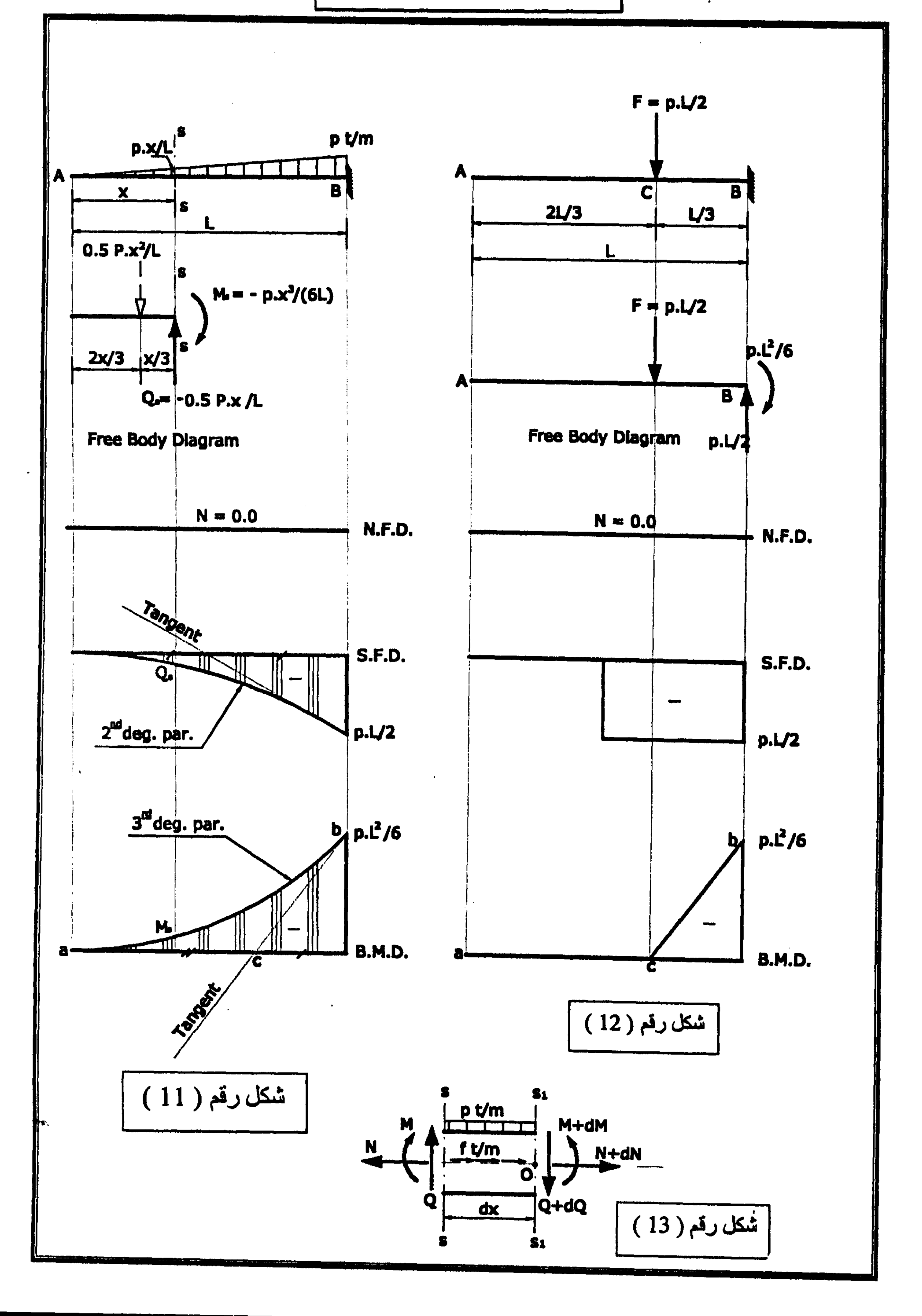
For $x = L$; (point B) ; $M = - (p.L^2) / 6$, $dM / dx = - 0.5 * (p.L)$

ولرسم المماس عند نقطة (A) ، نلاحظ أن ميله يساوى صفر اى انه أفقى وحيث أن قيمة العزم عند (A) تساوى صفر لذلك سوف يكون المماس عند (A) منطبقا على خط القاعدة (Datum Line) ، فى حين أن ميل المماس عند نقطة (B) يساوى (0.5 p.L -) أى أن ظل الزاوية المحصورة بين هذا المماس والخط الأفقى عند (b) تساوى (0.5 p.L-) ، فاذا افترضنا أن هذا المماس يقطع خط القاعدة فى النقطة (c) والتى تبعد عن الطرف المثبت (B) بمقدار المسافة (z) ، حيث يمكن ايجاد المسافة (z) على النحو التالى : -

$$\tan(\phi) = (- (p.L^2) / 6) / z = - 0.5 p.L \quad \text{i.e.} \quad z = L / 3$$

اى أن المماس لمنحنى الدرجة الثالثة يقسم خط القاعدة بنسبة (١ : ٢) ، **وبمقارنة نقطة تقاطع المماس لعزوم الانحناء مع خط القاعدة بنقطة تأثير الحمل المركز المكافئ للحمل الموزع نجد تطابقا تاما وذلك لجميع الحالات** . وبعد توقيع قيمتى العزم عند نقطتى البداية والنهاية ورسم المماسين عندهما يتم رسم منحنى العزم بحيث يمر بنقطتى البداية والنهاية ويمس المماسين عندهما ، وعلى هذا تكون أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى كما هو موضح بالشكل رقم (١١) .

من الملاحظ فى كل الحالات السابقة أن ايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بطريقة القطاعات يستغرق وقتا طويلا وجهدا كبيرا وشاقا وخصوصا اذا كانت المنشآت المراد ايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لها كبيرة أو مركبة وكانت الأحمال المؤثرة عليها كثيرة ومختلفة ، لذلك سوف نلجأ الى طريقة أخرى أكثر سهولة ولا تستغرق وقتا طويلا وهذه الطريقة هى طريقة الاستبدال والتصحيح ، ولكى نفهم هذه الطريقة يجب أولا مقارنة أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لحمل موزع وأشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لحمل مركز يساوى الحمل المكافئ للحمل الموزع ويؤثر فى نفس مكان تأثير الحمل المكافئ – أنظر شكلى (٩ ، ١٢) - وعلى سبيل المثال نأخذ الحالة السابقة وهى حالة حمل مثلثى وحيث أن قيمة الحمل المكافئ لهذه الحالة هى (F = 0.5 p.L) ويؤثر فى ثلث البحر (L) من ناحية الكثافة الكبيرة ، لذلك سوف نعتبر أن هناك كابولى (AB) مطابق تماما للكابولى الموضح فى الحالة السابقة وعليه حمل مركز (F) حيث (F = 0.5 p.L) ويؤثر عند نقطة (c) فى ثلث البحر كما هو موضح فى شكل رقم (١٢) وهو نفس مكان تأثير الحمل المكافئ للحمل المثلثى الموضح فى الحالة السابقة ، ثم نرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه الحالة (حالة حمل مركز مساو للحمل المكافئ) كما هو موضح بالشكل رقم (١٢) . وبمقارنة أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لحالة الحمل الموزع وحالة الحمل المركز – شكلى (٩ ، ١٢) - نلاحظ الآتى : -



شكل رقم (11)

شكل رقم (12)

شكل رقم (13)

- أن قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى عند بداية ونهاية الحمل الموزع تطابق تماما قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى لحالة الحمل المركز المساوى للحمل المكافئ عند نفس النقاط .
- شكل عزوم الانحناء الناتج من حالة الحمل المركز وهى عبارة عن مضلع تطابق تماما المماسات لشكل عزوم الانحناء فى حالة الأحمال الموزعة

ولهذه الملاحظات أهمية كبرى فى رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى للأحمال الموزعة باستخدام طريقة الاستبدال والتصحيح كما سنرى فيما بعد .

العلاقات التفاضلية بين الحمل والقص وعزوم الانحناء

يمكن اثبات العلاقات التفاضلية بين الحمل والقص وعزوم الانحناء رياضيا على النحو التالى : -

١. نعتبر جزءا صغيرا من المنشأ طوله (dx) محصور بين قطاعين متجاورين (S-S , S1-S1) ويؤثر عليه حمل رأسى موزع كثافته (p t/m) وحمل أفقى موزع - فى اتجاه محور المنشأ – كثافته (f t/m) كما هو موضح بالشكل رقم (١٣) ، ولنفرض أن مؤثرات الاجهاد الداخلى عند القطاع (S-S) هى (N , Q , M) وعند القطاع (S1-S1) هى (N + dN , Q + dQ , M + dM) ثم نضع كل هذه المؤثرات فى الاتجاه الموجب ، كما هو موضح بالشكل رقم (١٣) .
٢. نطبق شرط الاتزان الأفقى ($\Sigma X = 0.0$) .

$$N - f.dx - (N + dN) = 0.0 \quad , \quad \text{or} \quad dN / dx = - f$$

٣. نطبق شرط الاتزان الرأسى ($\Sigma Y = 0.0$) .

$$Q - p.dx - (Q + dQ) = 0.0 \quad , \quad \text{or} \quad dQ / dx = - p$$

٤. نطبق شرط عزوم الانحناء حول النقطة (O) ونساويه بالصفر ($\Sigma M @ O = 0.0$) .

$$M + Q.dx - p.dx.dx / 2 - (M + dM) = 0.0$$

نلاحظ أن المقدار (p.dx.dx / 2) متناهى فى الصغر لذلك يمكن اهماله وبذلك تصبح المعادلة السابقة على النحو التالى : -

$$Q.dx - dM = 0.0 \quad , \quad \text{or} \quad dM / dx = Q$$

وبتفاضل طرفى المعادلة السابقة ينتج أن : -

$$d^2M / dx^2 = dQ / dx \quad , \quad \text{but} \quad dQ / dx = - p$$

$$\text{i.e.} \quad d^2M / dx^2 = dQ / dx = - p$$

نلاحظ أن العلاقات التفاضلية السابقة والتى تم استنتاجها رياضيا هى نفسها العلاقات السابق استنتاجها فى الحالات والأمثلة السابقة . واذا أجرينا تكاملا محددا بين أى قطاعين على محور المنشأ ينتج أن : -

$$Q_2 - Q_1 = \Delta Q = - \int_{x1}^{x2} p.dx$$

$$M_2 - M_1 = \Delta M = \int_{x1}^{x2} Q.dx$$

معنى العلاقات التكاملية السابقة ، أن فرق قيمتى القص بين أى قطاعين يساوى مساحة الحمل الموزع بين هذين القطاعين وباشارة سالبة ، كما أن الفرق بين قيمتى عزوم الانحناء بين أى قطاعين يساوى مساحة القص بين هذين القطاعين مع ملاحظة أن اتجاه الحساب من اليسار الى اليمين ، أما اذا كان اتجاه الحساب من اليمين الى اليسار فيجب عكس اشارة المساحات السابقة .

تلخيص الملاحظات والعلاقات التفاضلية والتكاملية السابقة

يمكن تلخيص كل ما تم تسجيله من ملاحظات وعلاقات تفاضلية وتكاملية على النحو التالى : -

- معدل تغير قوى القص عند أى قطاع على محور المنشأ (ميل المماس لمنحنى القص) يساوى كثافة الحمل عند هذا القطاع وباشارة سالبة .
- معدل التغير فى عزم الانحناء عند أى قطاع على محور المنشأ (ميل المماس لمنحنى العزوم) يساوى قيمة القص عند هذا القطاع .
- فرق قيمتى القص بين أى قطاعين على محور المنشأ يساوى مساحة الحمل الموزع بين هذين القطاعين وباشارة سالبة .
- الفرق بين قيمتى عزوم الانحناء بين أى قطاعين على محور المنشأ يساوى مساحة القص بين هذين القطاعين .
- فى حالة الأحمال المركزة فقط يكون شكل القوى العمودية وشكل قوى القص عبارة عن شكل مدرج ، ثابت القيمة بين كل حملين مركزين ، ويكون شكل عزوم الانحناء شكلا مضلعا .
- فى حالة الأحمال الموزعة ، يكون شكل القص عبارة عن منحنى (قطع مكافئ) من درجة تزيد عن درجة الحمل بمقدار درجة واحدة ، ويكون شكل عزوم الانحناء عبارة عن منحنى من درجة تزيد عن درجة منحنى القص بمقدار درجة واحدة وتزيد عن درجة الحمل بمقدار درجتين ؛ بمعنى أنه اذا كانت دالة الحمل من الدرجة (n) فان القص يكون عبارة عن منحنى من الدرجة (n + 1) ويكون منحنى عزوم الانحناء من الدرجة (n + 2) . فمثلا اذا كان الحمل من الدرجة الأولى (n = 1) فان القص يكون على شكل منحنى من الدرجة الثانية وعزم الانحناء من الدرجة الثالثة وهكذا .
- اذا كان الحمل على شكل منحنى جيبى (Sine curve) فان القص يكون شكل منحنى جيبى تمام (Cosine curve) ويكون شكل عزوم الانحناء عبارة عن منحنى جيبى (Sine curve) .
- فى حالة استبدال حمل موزع بحمل مركز مكافئ فان قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى عند بداية ونهاية الحمل الموزع تكون متطابقة فى حالتى الحمل الموزع والحمل المركز المكافئ ، كما أن شكل عزوم الانحناء فى حالة الحمل المركز المكافئ يكون متطابق مع المماسات لشكل عزوم الانحناء فى حالة الحمل الموزع . ولهذه الملاحظة أهمية كبيرة عند استخدام طريقة الاستبدال والتصحيح .

طريقة الاستبدال والتصحيح (Substitution and Correction Method)

كما ذكرنا سابقا وكما هو واضح من الأمثلة السابقة نلاحظ أن الاستعمال المباشر للعلاقات التفاضلية لايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى من معادلة توزيع الأحمال ليس من السهولة بمكان وخاصة عندما تتعدد معادلات الأحمال فى الأجزاء المختلفة من المنشأ ، ولهذا فان طريقة الاستبدال والتصحيح تعتبر من الطرق المفضلة لايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى نظرا لسهولتها ودقتها فى نفس الوقت وتتلخص هذه الطريقة فيما يلى : -

١. يتم استبدال جميع الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة ويؤثر كل حمل مركز فى مركز ثقل الحمل الموزع الذى حل محله .
٢. يتم رسم أشكال القوى العمودية – ان وجدت – وقوى القص وعزوم الانحناء تحت تأثير الأحمال المركزة المكافئة .
٣. نحدد بداية ونهاية كل حمل موزع تم استبداله وتكون قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى فى بداية ونهاية كل حمل موزع صحيحة على أن يتم تصحيح شكل دالة مؤثرات الاجهاد الداخلى بين بداية ونهاية كل حمل موزع مع مراعاة ما جاء فى المعادلات التفاضلية والملاحظات السابقة .

أمثلة عددية لتوضيح طريقة الاستبدال والتصحيح

مثال ٤

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٤) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

نلاحظ فى هذا المثال أن هناك حملا مركزا عند الطرف الحر (A) ، وحملا موزعا بانتظام فى الجزء (CD) ، وحملا من الدرجة الأولى (حملا مثلثا) فى الجزء (DB) وعلى هذا يتم استبدال الحمل المنتظم بحمل مكافئ مقداره (٨ طن) ويؤثر فى منتصف المسافة (CD) عند نقطة (E) ، وكذلك يتم استبدال الحمل المثلثى بحمل مكافئ يساوى مساحة المثلث ويؤثر فى مركز ثقل المثلث عند نقطة (F) وهذا الحمل مقداره (٦ طن) ، ثم نوجد بعد ذلك ردود الأفعال الخارجية عند الركيزة المثبتة (B) وهى ($Yb = 9\ t$, $Xb = 0.0$, $Mb = 9\ t.m$) وذلك باستخدام شروط الاتزان المعروفة ، كما سبق ذكره فى الفصل الأول انظر شكل رقم (١٤) .

يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء للأحمال المكافئة على أنها أحمال مركزة ، ثم يتم تصحيح أشكال قوى القص وعزوم الانحناء وذلك على النحو التالى : -

- الجزء (AC) خالى من الأحمال الموزعة وبالتالى يظل الرسم فى هذا الجزء كما هو بدون تعديل .
- الجزء (CD) يؤثر عليه حمل موزع بانتظام ، أى من الدرجة (صفر) وعلى هذا يكون شكل القص لهذا الجزء من الدرجة الأولى ، أى خط مستقيم مائل وحيث أن قيمتى القص عند بداية ونهاية هذا الحمل صحيحة فيتم توصيل نقطة البداية (c) بنقطة النهاية (d) ليعطى الشكل الصحيح للقص فى هذا الجزء ويتم تهشير هذا الجزء من خط القاعدة وحتى الخط المائل ، وتوضع اشارة القص داخل المساحة المهشرة ، أما شكل عزوم الانحناء لهذا الجزء فسوف يكون منحنى من الدرجة الثانية وكما ذكرنا سابقا يتم رسم أى منحنى بمعرفة نقطتى البداية والنهاية والمماسين عند هاتين النقطتين وحيث أن نقطتى البداية والنهاية صحيحتان ، لذلك نعتبر هاتان النقطتان (c , d) هما بداية ونهاية المنحنى كما يعتبر الخطان المرسومان من هاتين النقطتين فى شكل عزوم الانحناء الناتج من الحمل المكافئ هما المماسان لمنحنى العزم عند هاتين النقطتين ، وعلى هذا يتم رسم منحنى العزوم فى هذا الجزء كما هو موضح بالشكل رقم (١٤) ويتم تهشير المساحة المحصورة بين خط القاعدة وبين المنحنى المرسوم على أن تكون خطوط التهشير رأسية – عمودية على خط القاعدة – ويتم وضع اشارة العزوم حسب قاعدة الاشارات السابق ذكرها فى الفصل الأول .
- الجزء (DB) يؤثر عليه حمل مثلثى (أى من الدرجة الأولى) وبالتالى يكون شكل القص عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية وهذا المنحنى يبدأ بنقطة (d) وينتهى بنقطة (b) – بداية ونهاية الحمل المثلثى – ولايجاد المماسان عند هاتين النقطتين ، نستخدم العلاقة التفاضلية ($dQ / dx = - p$) أى أن ميل المماس لمنحنى القص عند نقطة ما يساوى كثافة الحمل عند هذه النقطة باشارة سالبة – كما ذكر سابقا – وبالنظر الى شكل الحمل المثلثى ، نلاحظ أن كثافة الحمل عند نقطة (B) تساوى صفر وبالتالى يكون ميل المماس عند النقطة المناظرة فى شكل القص (b) يساوى صفر ، أى أن هذا المماس يكون موازيا لخط القاعدة – أى أنه أفقى – ويمر بالنقطة (b) ، ويعتبر هذا المماس هو المماس عند نقطة النهاية (b) ، أما المماس عند نقطة (d) فسوف ينصف المسافة المناظرة للمسافة (DB) – مسافة تأثير الحمل – على المماس المرسوم من النقطة (b) ، وبذلك يتم رسم منحنى القص كما بالشكل رقم (١٤) . أما عزوم الانحناء على هذا الجزء فسوف يكون منحنى من الدرجة الثالثة ويبدأ هذا المنحنى بنقطة (d) وينتهى بنقطة (b) – بداية ونهاية الحمل المثلثى – ويمس المضلع الناتج من الحمل المكافئ .

ملحوظة هامة

أحيانا فى بعض أجزاء شكل عزوم الانحناء نحتاج الى رسم منحنى العزم بدقة أكبر وذلك بايجاد نقاط أكثر على منحنى العزم أو برسم مماسات اضافية أو هما معا ، وغالبا تكون هذه النقاط والمماسات عند القيم العظمى والصغرى لمنحنى العزوم لما لهذه القيم من أهمية بالغة فى التحليل والتصميم الانشائى ، وفى مثل هذه الأحوال نستعين بالعلاقة التفاضلية ($dM / dx = Q$) – ميل المماس لمنحنى العزم يساوى قيمة القص – وعند القيم العظمى أو الصغرى يكون ميل المماس لمنحنى العزم يساوى صفر - المماس يوازى خط القاعدة -

أى أن قيمة القص عند هذه القيم تساوى صفر (Zero Shear) . ففى هذا المثال نلاحظ أن القص يتلاشى عند نقطة (n) والتى تبعد عن نقطة (c) بمقدار (z) ، حيث يمكن ايجاد المسافة (z) - وبالتالى القيم العظمى أو الصغرى - بطرق عديدة وذلك على النحو التالى : -

أ- باستبدال الحمل الموزع فى الجزء المناظر للمسافة (cn) بحمل مركز مكافئ قيمته (4z) ودراسة القص عند القطاع المناظر لنقطة (n) ومساواة ذلك بالصفر ، أى أن : -

$5 - 4z = 0.0$, i.e. $z = 5 / 4 = 1.25$ m

وبحساب عزم الانحناء عند القطاع المناظر لنقطة (n) نحصل على أقصى عزم وذلك كما يلى : -

$M_{max.} = 5 * (2 + z) - 4 * z * z / 2$

i.e. $M_{max.} = 5 * (2 + 1.25) - 4 * (1.25)^2 / 2 = 13.125$ t.m.

ب- ميل المماس لشكل القص عند النقطة (n) يساوى كثافة الحمل عند القطاع المناظر لهذه النقطة ، وحيث أن شكل القص فى هذا الجزء عبارة عن خط مستقيم فان ميل المماس هو نفسه ميل الخط (cd) والذى يساوى ظل الزاوية (ϕ) أى أن : -

$\tan \phi = 4 = 5 / z$, or $z = 5 / 4 = 1.25$ m

وفى هذه الحالة يتم حساب أقصى عزم بالاستعانة بالعلاقة التكاملية ($\Delta M = \int_{x1}^{x2} Q.dx$) وذلك على النحو التالى : -

$M_{max.} - Mc$ = Shear area in part (cn)

i.e. $M_{max.} - 10 = 0.5 * 5 * 1.25 = 3.125$, or

$M_{max.} = Mn = 10 + 3.125 = 13.125$ t.m.

وهى نفس القيم السابق حسابها .

ج- من خواص شكل دالة القص (القص فى هذا الجزء عبارة عن خط مستقيم) وذلك كما يلى : -

$(5 / z) = 3 / (2 - z)$ or $5 * (2 - z) = 3 * z$

i.e. $10 - 5z = 3z$, or $8z = 10$, i.e. $z = 10 / 8 = 1.25$ m.

وبعد ايجاد المسافة (z) ، يتم حساب أقصى عزم بأى من الطريقتين السابقتين .

مثال ٥

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٥) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

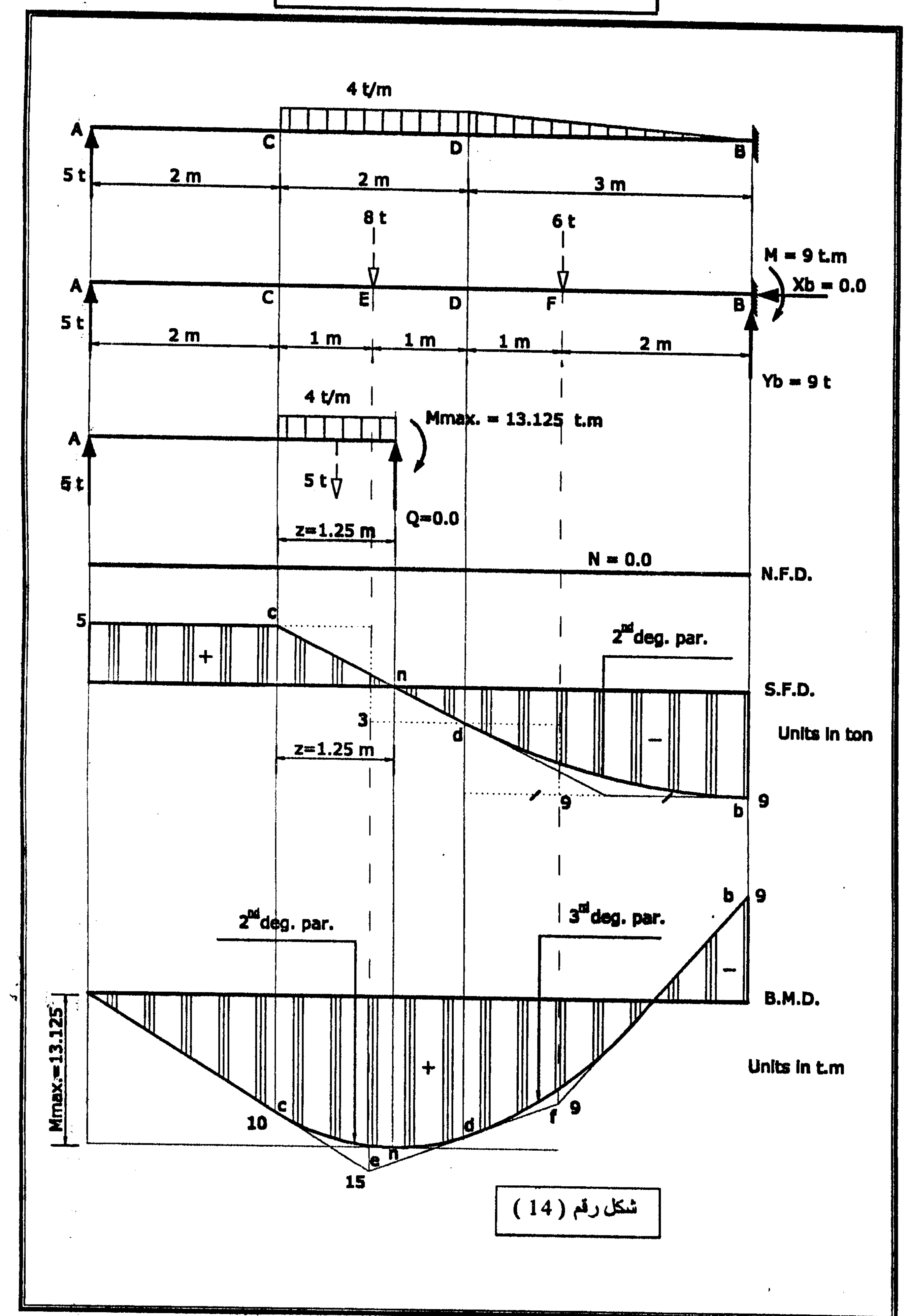
الحل

نتبع نفس الخطوات السابقة كما فى المثال (٤) من استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة وتؤثر فى مركز ثقل الأحمال الموزعة ، ثم ايجاد ردود الأفعال عند الركائز الخارجية (A , B) وان كانت فى هذا المثال تساوى صفر ثم يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء كما هو موضح بالشكل رقم (١٥) .

ملاحظات على هذا المثال

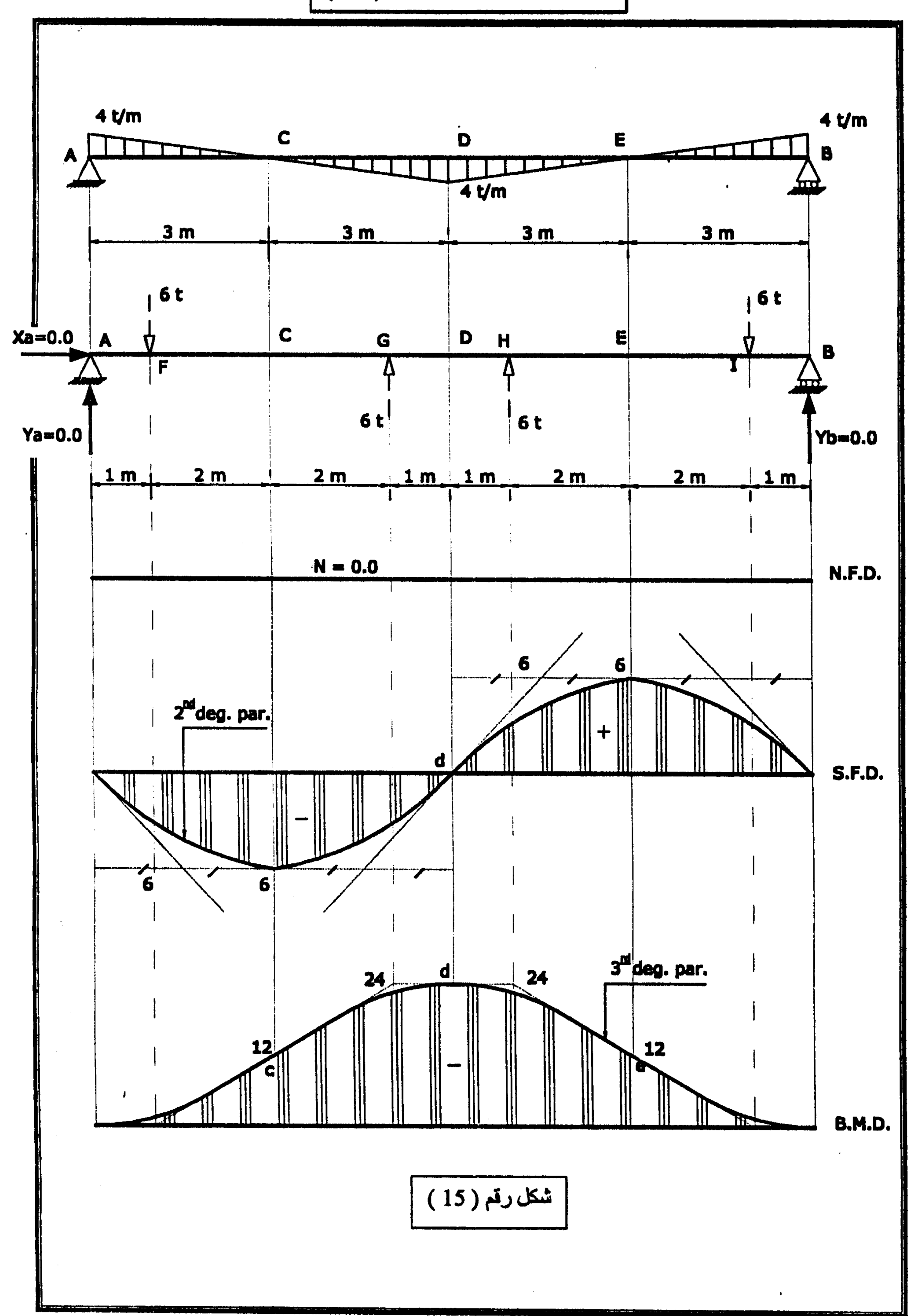
- نلاحظ أن قيم القص تكون أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن عندما تكون كثافة الحمل تساوى صفر ، أى عندما يكون ميل المماس لمنحنى القص يساوى صفر وذلك يتمشى مع العلاقة التفاضلية :

$dQ / dx = - p = 0.0$



4 t/m
A
C
D
B
5 t
2 m
2 m
3 m
8 t
6 t
M = 9 t.m
Xb = 0.0
E
F
1 m
1 m
1 m
2 m
Yb = 9 t
Mmax. = 13.125 t.m
5 t
Q=0.0
z=1.25 m
N = 0.0
N.F.D.
2nd deg. par.
S.F.D.
Units in ton
n
d
b
3
9
3rd deg. par.
B.M.D.
Units in t.m
Mmax.=13.125
10
15
e
f

شكل رقم (14)



4 t/m
4 t/m
A
C
D
E
B
4 t/m
3 m
3 m
3 m
3 m
6 t
6 t
Xa=0.0
A
F
C
G
D
H
E
B
6 t
6 t
Ya=0.0
Yb=0.0
1 m
2 m
2 m
1 m
1 m
2 m
2 m
1 m
N = 0.0
N.F.D.
2nd deg. par.
6
6
d
+
−
6
6
S.F.D.
24
d
24
3rd deg. par.
12
c
−
12
e
B.M.D.

شكل رقم (15)

- كما نلاحظ أن أقصى يكون عند تلاشى قيمة القص (Zero Shear) طبقا للعلاقة التفاضلية :

$$dM / dx = Q = 0.0$$

فى هذا المثال نلاحظ أن أقصى عزم سالب هو عند نقطة (D) وقيمته العددية تساوى (٢٤ طن.متر) ، وهذه القيمة يمكن حسابها بسهولة وذلك بحساب مساحة شكل القص للجزء (AD) .

$$M_{max.} = (2/3) * 6 * 6 = 24 \text{ t.m.}$$

- ونلاحظ أيضا أن هناك نقط انقلاب (Inflection points) على شكل منحنى العزوم وهذه النقط هى (c , e) وكما هو واضح من شكل عزوم الانحناء فانه عند نقط الانقلاب يتغير اتجاه المنحنى وهذا يعرف رياضيا بأن التفاضل الثانى لدالة عزم الانحناء تساوى صفر ، أى أن : -

$$d^2M / dx^2 = 0.0 \quad , \text{but} \quad d^2M / dx^2 = dQ / dx = - p \quad ,$$

$$\text{i.e.} \quad dQ / dx = - p = 0.0$$

أى أن نقط الانقلاب لمنحنى العزوم تحدث عندما تكون كثافة الحمل تساوى صفر أو ميل المماس لمنحنى القص يساوى صفر – عند القيم القصوى والدنيا للقص – وكما هو موضح بالشكل رقم (١٥) ، نلاحظ أن كثافة الحمل تساوى صفر عند النقطتين (C , E) وعند هاتان النقطتان ، نلاحظ أن منحنى العزم حدث له انقلاب ، كما أن المماس لمنحنى القص عندهما يوازى خط القاعدة – حيث أقصى وأدنى قيمة للقص – وبنفس الطريقة يكون هناك نقط انقلاب فى شكل القص وهذه النقط تكون عند الكثافة القصوى أو الدنيا لشكل توزيع الأحمال ، ففى هذا المثال نلاحظ أن نقطة (d) حدث عندها انقلاب فى شكل القص وذلك لأن كثافة الحمل عند النقطة المناظرة لها أقصى ما يمكن .

مثال ٦

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٦) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

فى هذا المثال نلاحظ وجود حمل موزع بانتظام فى الجزء (AB) ولكن فى نفس الوقت يوجد حمل مركز عند نقطة (D) فى المسافة ما بين (A , B) ، لذلك لايمكن استبدال الحمل الموزع الموجود فى الجزء (AB) بحمل مركز مكافئ وذلك لتعذر تصحيح أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بسبب وجود الحمل المركز داخل الحمل الموزع وذلك لاختلاف درجة الحمل المركز عن درجة الحمل الموزع (فالحمل المركز لايصحح فى حين أن الحمل الموزع يتم تصحيحه ولايجوز أن يحدث تداخل بين الحمل المركز والحمل الموزع) ، لذلك يجب فصل الحمل الموزع - عند مكان وجود الحمل المركز – الى جزءين أحدهما على يسار الحمل المركز – الجزء (AD) – والأخر على يمين الحمل المركز – الجزء (DB) ، ثم يتم استبدال الحمل الموزع فى كل جزء على حدة ، كما هو موضح بالشكل رقم (١٦) . وبعد ايجاد ردود الأفعال الخارجية عند الركيزتين (A , B) – وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة – يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى وذلك على النحو التالى : -

<u>أولا : شكل قوى القص</u>

- الجزء (AC) خالى من الأحمال الموزعة وبالتالى لايحدث تصحيح لشكل للقص .
- يتم تصحيح الجزء (AD) الى دالة من الدرجة الأولى (خط مستقيم) ، حيث أن الحمل من الدرجة صفر (حمل موزع بانتظام) ويتم رسم الخط المستقيم ليصل بين نقطة البداية (a_r) ونقطة النهاية (d_l) ، حيث أن قيم القص عندهما صحيحة . وكذلك يتم رسم الخط المستقيم الخاص بالجزء (DB) وذلك بتوصيل نقطة البداية (d_r) بنقطة النهاية (b_l) .

مثال ٧

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٧) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

نلاحظ فى هذا المثال أن الحمل عبارة عن حمل موزع من الدرجة الأولى على شكل شبه منحرف ، ولايجاد الحمل المركز المكافئ له ومكان تأثيره نرجع الى الجدول رقم (١) فى الفصل الأول ، وذلك على النحو التالى : -

$$F = 0.5 * (2 + 4) * 9 = 27 \text{ ton} .$$
$$e = (9 / 3) ((2 + 2 * 4) / 6) = 5 \text{ m} .$$

مع ملاحظة أنه يمكن ايجاد مكان تأثير الحمل فى هذه الحالة تخطيطيا وذلك برسم شبه المنحرف بمقياس رسم مناسب ويتم تقسيم قاعدة شبه المنحرف الى ثلاثة أقسام متساوية عن طريق النقطتين (b1 , b2) ، ثم نرسم خط مستقيم يصل الكثافة الأولى بالنقطة (b1) وكذلك نرسم خط مستقيم آخر يصل الكثافة الثانية بالنقطة (b2) ونقطة تلاقى هذين الخطين هى مكان تأثير الحمل المركز المكافئ ، أنظر شكل رقم (١٧) .

بعد ايجاد قيمة الحمل المركز المكافئ ومكان تأثيره ، نوجد ردود الأفعال الخارجية كما سبق ذكره فى الفصل الأول وبعد ذلك يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء على أساس الأحمال المكافئة ثم يتم تصحيح هذه الأشكال على النحو التالى : -

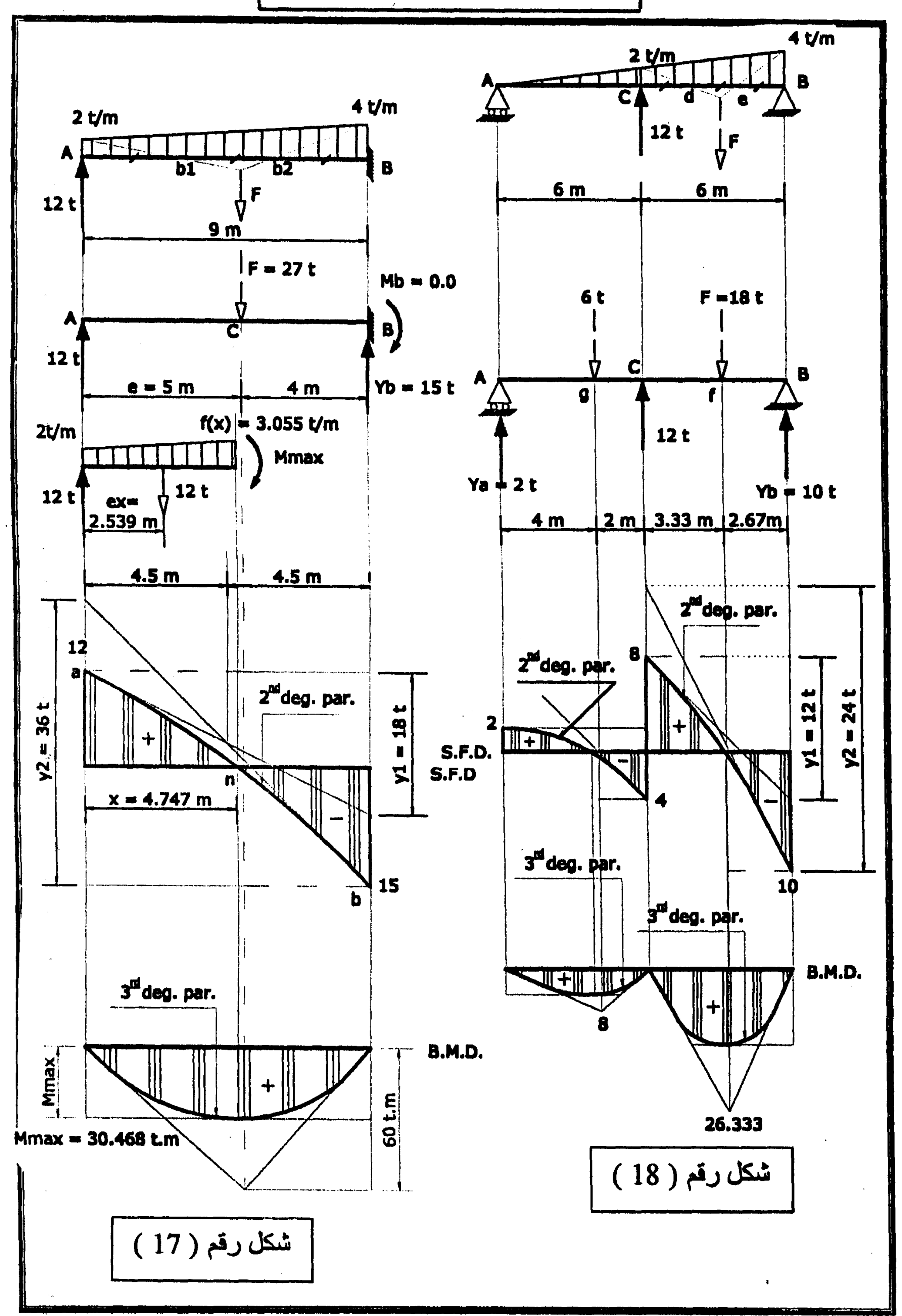
<u>أولا : شكل قوى القص</u>

حيث أن الحمل الموزع من الدرجة الأولى وعليه فان شكل القص يكون عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، وكما ذكر سابقا يتم رسم هذا المنحنى بمعرفة نقطتى البداية والنهاية وكذلك المماسين عندهما وحيث أن قيمتى القص عند بداية ونهاية الحمل الموزع هى نفسها القيم المحسوبة فى حالة الحمل المركز المكافئ ، لذلك تعتبر قيمتى القص عند النقطتين (a , b) هما بداية ونهاية منحنى القص ، وحيث أن ميل المماس لمنحنى القص عند نقطة معينة يساوى قيمة كثافة الحمل عند نفس النقطة وباشارة سالبة وبالاستعانة بالشكل رقم (١٠-١) يتم رسم المماسين لمنحنى القص عند النقطتين (a , b) حيث أن ميل المماس الأول - عند نقطة (a) – يساوى (-٢) وفى نفس الوقت يساوى (y_1 / 9) ، أى أن (y_1 = 18) أنظر شكل رقم (١٧) وبنفس الطريقة نوجد ميل المماس الثانى – عند نقطة (b) - حيث أن ميل المماس عند هذه النقطة يساوى (- ٤) وفى نفس الوقت يساوى (y_2 / 9) ، أى أن (y_2 = 36) على أن توقع (y_1 , y_2) بنفس مقياس رسم القص ، ثم يتم بعد ذلك رسم منحنى القص بحيث يمر بالنقطتين (a , b) ويمس المماسين عندهما انظر شكل رقم (١٧) .

<u>ثانيا : شكل عزوم الانحناء</u>

يتم رسم شكل عزوم الانحناء للقوى المركزة والقوى المركزة المكافئة للحمل الموزع ويكون الشكل الناتج عبارة عن مضلع يمثل المماسات لمنحنى عزوم الانحناء ، وعلى هذا يتم رسم منحنى عزوم الانحناء بحيث يمر بنقطتى البداية والنهاية ويمس المماسين عندهما ، ولزيادة دقة رسم المنحنى يتم حساب أقصى عزم موجب وهو عند النقطة المناظرة لنقطة تلاشى قوة القص - وهى نقطة (n) - ثم يتم رسم مماس أفقى لمنحنى العزم عند هذه النقطة ، ليصبح منحنى العزم يمر بثلاث نقاط ويمس ثلاثة مماسات عند هذه النقاط الثلاث أنظر شكل رقم (١٧) . ولحساب أقصى عزم موجب ، نعتبر القطاع (S - S) على بعد (x) من الطرف الحر (A) ، وبالرجوع الى الجدول رقم (١) ، نوجد كثافة الحمل (f(x)) عند هذا القطاع ثم نوجد الحمل المركز المكافئ لهذا الجزء من الحمل (F_x) وكذلك مكان تأثيره (e_x) ، ثم نوجد النقطة (n) – نقطة تلاشى القص – ثم نحسب قيمة العزم عند هذه النقطة وهذا العزم هو أقصى عزم موجب ، وذلك على النحو التالى :-

$$f(x) = 2 + (4 - 2) * x / L = 2 + 2 * x / L$$
$$F_x = 0.5 * (2 + 2 + 2 * x / L) * x = 2 * x + x^2 / L$$
At zero shear , $12 - F_x = 0.0$, i.e. $12 - 2 * x - x^2 / 9 = 0.0$, or , $x = 4.7477$ m



شكل رقم (17)

شكل رقم (18)

$e_x = (4.7477 / 3) * (2 + 2 * 3.055) / (2 + 3.055) = 2.539$ m .

Mmax = 12 * 2.539 = 30.468 t.m.

مثال ٨

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٨) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

نلاحظ فى هذا المثال أن الحمل الموزع عبارة عن حمل مثلثى بكامل البحر (AB) ، ويوجد حمل مركز عند نقطة (C) لذلك يجب فصل الحمل المثلثى الى جزءين – الجزء الأيسر (AC) عبارة عن حمل مثلثى والجزء الأيمن (CB) عبارة عن حمل على شكل شبه منحرف – كما بالشكل رقم ( ) ولرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى نتبع نفس الخطوات السابق ذكرها فى المثال رقم (٧) ، والشكل رقم (١٨) يوضح طريقة تقسيم الحمل والأحمال المركزة المكافئة ومكان تأثيرها وكذلك شكلى قوى القص وعزوم الانحناء .

نلاحظ من المثالين السابقين رقمى (٧ ، ٨) أن هناك صعوبة فى حساب الأحمال المكافئة لشبه المنحرف وكذلك مكان تأثيره ، كما نلاحظ أن هناك صعوبة فى رسم شكل قوى القص وعدم دقة شكل عزوم الانحناء . ومع زيادة درجة دالة الحمل تزداد هذه الأشكال صعوبة وللتغلب على هذه الصعوبات سوف نلجأ الى طريقة أخرى لرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لمثل هذه النوعية من الأحمال - (الأحمال الموزعة التى يتخللها أحمال مركزة أو عزوم مركزة) – وهذه الطريقة تسمى طريقة جمع الأشكال (Superposition of Diagrams) وتعتمد هذه الطريقة على تقسيم الأحمال الموزعة التى يصعب التعامل معها الى حملين أو أكثر من الأحمال التى يسهل التعامل معها ويتم بعد ذلك رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لكل حمل على حدة ، وحيث أن مؤثرات الاجهاد الداخلى النهائي عند أى قطاع يساوى مجموع مؤثرات الاجهاد الداخلى عند نفس القطاع لكل حالة تحميل وبالتالى فان شكل مؤثرات الاجهاد الداخلى النهائى لأى دالة يصبح مساويا لمجموع أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لنفس الدالة فى كل حالة تحميل ويتم جمع هذه الأشكال باحدى هاتين الطريقتين :

<u>الطريقة الأولى (الطريقة الخاصة)</u>

وتستخدم هذه الطريقة فقط اذا كان أحد الشكلين على الأقل خط مستقيم ، وفى هذه الحالة نعتبر أن الخط المستقيم هو خط القاعدة للشكل الآخر ومن ثم يتم رسم الشكل الآخر على الخط المستقيم المائل ويكون الشكل النهائى هو الشكل المحصور بين الشكل الثانى وخط القاعدة الأصلى أنظر شكل رقم (١٩) .

<u>الطريقة الثانية (الطريقة العامة)</u>

وفى هذه الطريقة يتم رسم أحد الشكلين ويرسم الشكل الآخر مقلوبا عليه وتكون قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى لأى دالة عند أى قطاع هى القيم المحصورة بين الشكلين – (الشكل الأول والشكل الثانى مقلوبا) – ويصبح خط القاعدة الأصلى لاقيمة له ويتم التهشير بين الشكلين وتكون الاشارة لأى جزء هى اشارة المنحنى الأعلى قيمة سواء أكانت سالبة أو موجبة ، وهذه الطريقة تصلح لكل أنواع الأشكال بلا استثناء ، أنظر شكل رقم (٢٠) .

ولتوضيح ذلك سوف يتم اعادة حل المثالين رقمى (٧ ، ٨) وذلك على النحو التالى : -

مثال ٧ مكرر

فى هذا المثال نلاحظ أن الحمل على شكل شبه منحرف ، لذلك سوف يتم تقسيمه الى حملين أحدهما على شكل حمل موزع بانتظام وكثافته (٢ طن / متر طولى) ، والآخر على شكل حمل مثلثى بكثافة قصوى (٢ طن / متر طولى) ثم نرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لكل حمل على حدة وذلك بالطرق المعتادة . نلاحظ أن

شكل القص الناتج من حالة الحمل الموزع بانتظام عبارة عن خط مستقيم وشكل القص الناتج من حالة الحمل المثلثى عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، فى مثل هذه الحالة يمكن استخدام الطريقة الخاصة لجمع الأشكال ، فى حين أن شكل العزم فى حالة الحمل الموزع بانتظام عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، وشكل العزم فى حالة الحمل المثلثى عبارة عن منحنى من الدرجة الثالثة ، فى مثل هذه الحالة لابد من استخدام الطريقة العامة لجمع الأشكال ، أنظر شكل رقم (٢١) .

مثال ٨ مكرر

فى هذا المثال نلاحظ وجود حمل مركز داخل حمل مثلثى ، لذلك سوف يتم تقسيم هذه الأحمال الى حالتين ، الأولى حالة الحمل المركز فقط ، والثانية حالة الحمل المثلثى فقط ويتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لكل حالة على حدة . نلاحظ أنه فى حالة الحمل المركز يكون شكل القص عبارة عن شكلا مدرجا ، بينما يكون منحنيا من الدرجة الثانية فى حالة الحمل المثلثى ، كما نلاحظ أن شكل عزوم الانحناء فى حالة الحمل المركز عبارة عن شكل مضلع وفى حالة الحمل المثلثى يكون شكل عزوم الانحناء عبارة عن منحنى من الدرجة الثالثة . فى هذا المثال وبالرغم من أنه يمكن جمع أشكال قوى القص وعزوم الانحناء بالطريقة الخاصة وذلك لأن أحد الشكلين عبارة عن خط مستقيم ، الا أنه تم استخدام الطريقة العامة لجمع الأشكال وذلك لسهولتها ، أنظر شكل رقم (٢٢) .

وبمقارنة أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى النهائية فى المثالين رقمى (٧ مكرر ، ٨ مكرر) ، بأشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى فى المثالين رقمى (٧ ، ٨) ، نلاحظ أنه يوجد تطابق تام فى أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى - (حالة القص فى مثال ٧ ، ٧ مكرر) - فى حالة استخدام الطريقة الخاصة لجمع الأشكال ، بينما يوجد اختلاف ظاهرى فى أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى النهائية فى حالة استخدام الطريقة العامة للتجميع ولكن قيم مؤثرات الاجهاد الداخلى النهائية عند أى قطاع متطابقة .

طريقة الكمرات الجزئية (Partial Beam Method)

تستخدم هذه الطريقة أساسا لرسم عزوم الانحناء بطريقة أكثر دقة فى سهولة ويسر دون الدخول فى تفاصيل حسابية معقدة ولكى نفهم هذه الطريقة ، نعتبر المثال التوضيحى الآتى : -

الشكل رقم (٢٣) يوضح كمرة بسيطة عليها حمل موزع بانتظام كثافته (p t/m) فى الجزء (CD) فقط ، ولرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى نتبع الآتى : -

١. يتم استبدال الحمل الموزع بحمل مركز مكافئ ويؤثر عند نقطة (E) قيمته (p.b) ثم نوجد ردود الأفعال الخارجية بالطرق المعتادة وهى على النحو التالى : -

$$Ya = p.b\,(b/2 + c)/L \quad , \quad Yb = p.b\,(a + b/2)/L$$

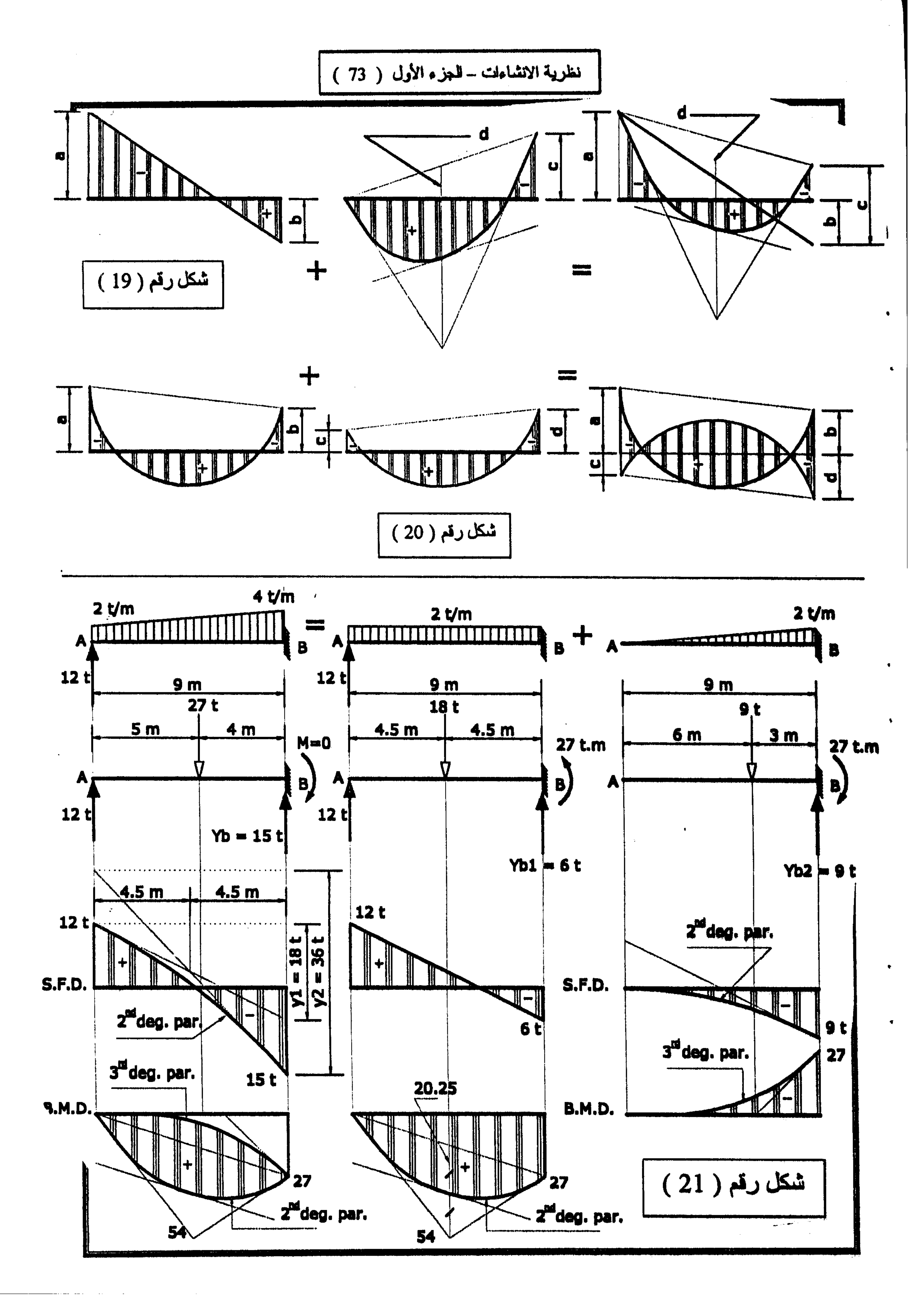
٢. يتم رسم شكل القص بالطريقة المعتادة كما فى الأمثلة السابقة ، أنظر شكل رقم (٢٣) .
٣. يتم رسم عزوم الانحناء على النحو التالى : -

أولا : الجزء (AC) وهو عبارة عن خط مستقيم يصل بين قيمتى العزم عند (A , C) وهما :

$$Ma = 0.0 \;,\; Mc = p.b\,.\,(b/2 + c)\,.\,a/L$$

ثانيا : الجزء (DB) وهو عبارة عن خط مستقيم أيضا ويصل بين قيمتى العزم عند (D , B) وهما :

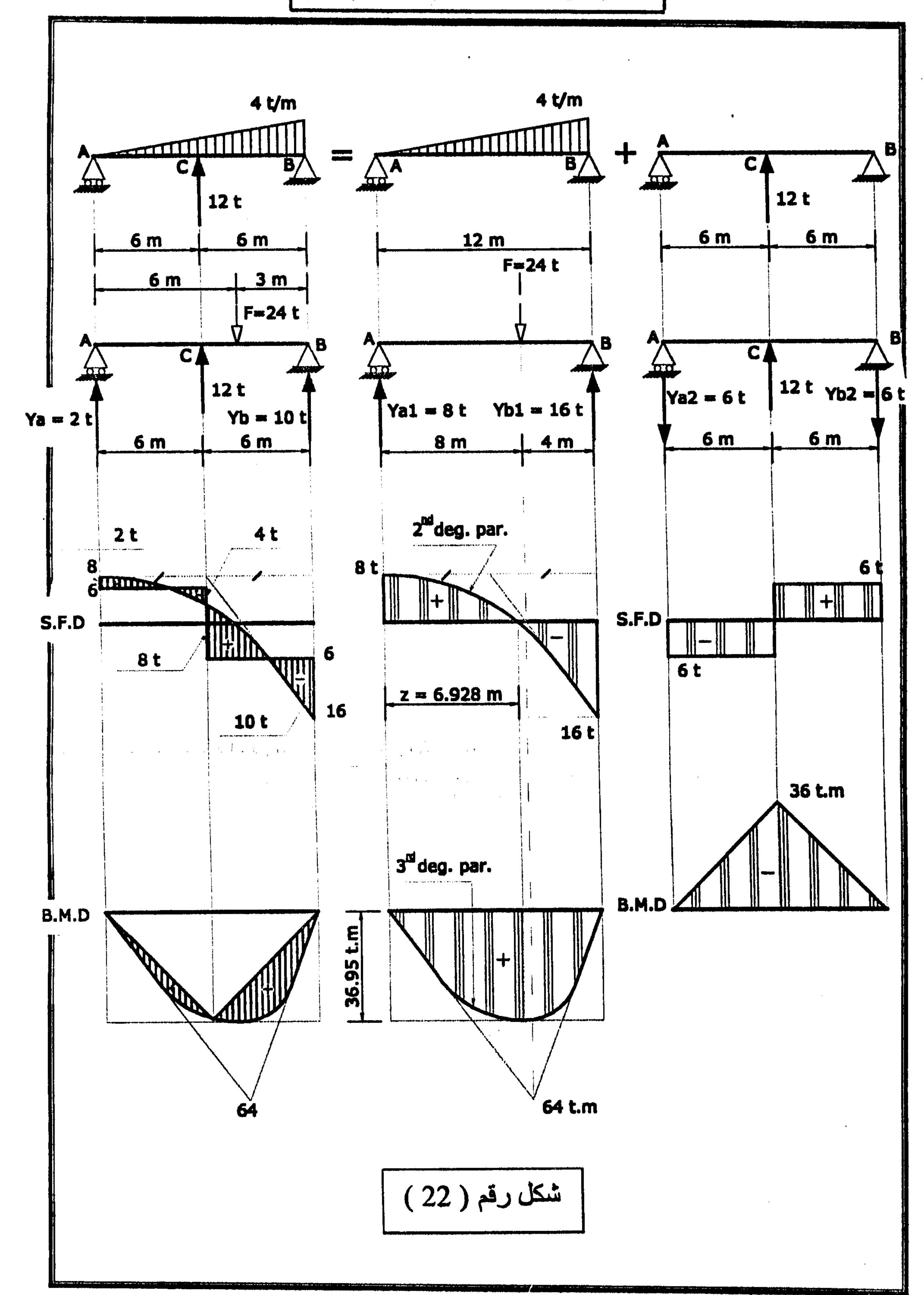
$$Md = p.b\,.\,(a + b/2)\,.\,c/L \;,\; Mb = 0.0$$



شكل رقم (19)

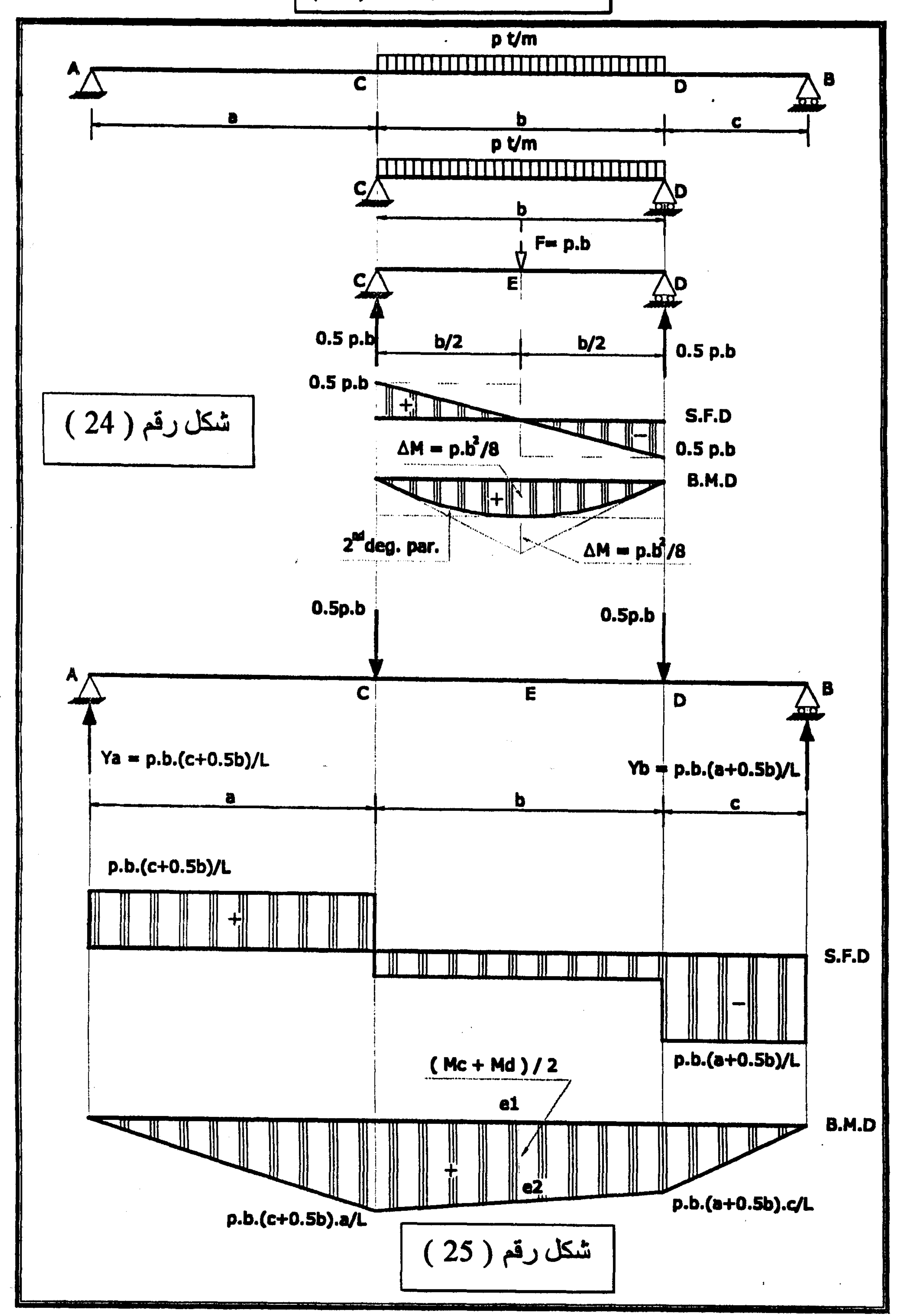
شكل رقم (20)

شكل رقم (21)



4 t/m
A
C
B
12 t
=
4 t/m
A
B
+
A
C
B
12 t
6 m
6 m
12 m
6 m
6 m
6 m
3 m
F=24 t
F=24 t
Ya = 2 t
12 t
Yb = 10 t
Ya1 = 8 t
Yb1 = 16 t
Ya2 = 6 t
12 t
Yb2 = 6 t
8 m
4 m
2 t
4 t
2nd deg. par.
8
6
8 t
6 t
S.F.D
S.F.D
8 t
6
16
10 t
z = 6.928 m
16 t
6 t
36 t.m
3rd deg. par.
B.M.D
B.M.D
36.95 t.m
64
64 t.m

شكل رقم (22)



شكل رقم (24)

شكل رقم (25)

أولا : الكمرة الجزئية (CD)

يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء بالطريقة المعتادة وذلك بعد استبدال الحمل الموزع بحمل مركز مكافئ ويؤثر فى مركز ثقل الحمل الموزع و حساب ردود الأفعال الخارجية ، ولزيادة دقة رسم شكل عزوم الانحناء يتم ايجاد أقصى عزم موجب وهو عندما يكون القص مساويا للصفر ونلاحظ أن القص يتلاشى عند منتصف الجزء (CD) وعليه يكون أقصى عزم موجب يساوى ($p.b^2$ / 8) ونلاحظ أن هذه القيمة تساوى نصف القيمة المحسوبة على أساس الحمل المركز المستبدل ، كما نلاحظ أن المماس عند أقصى عزم موجب أفقى أى أنه يوازى خط القاعدة ، ولهذه الملحوظة أهمية كبيرة فى استخدام الكمرات الجزئية كما سيأتى ذكره فيما بعد ، انظر شكل رقم (٢٤) .

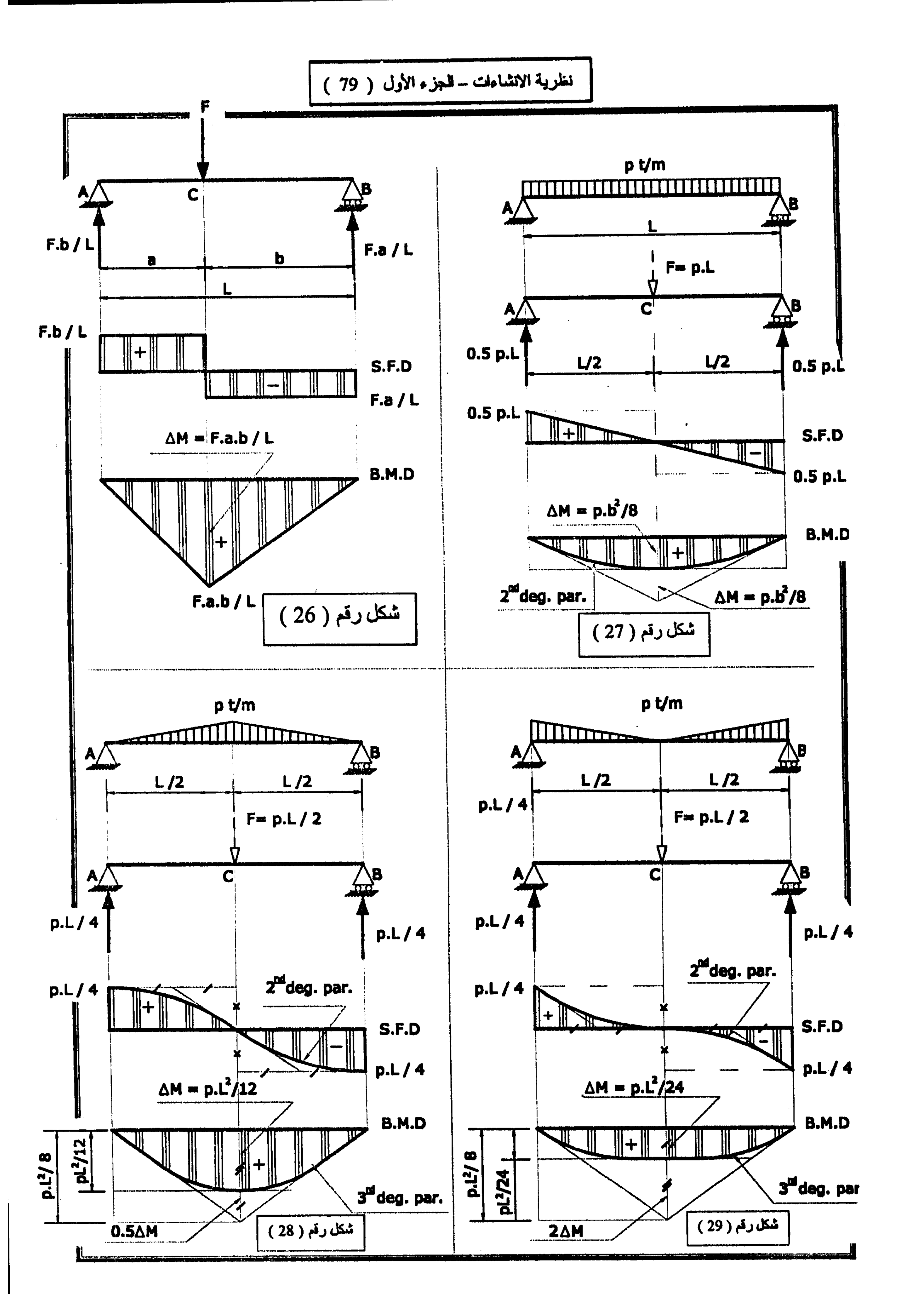
ثانيا : الكمرة الكلية (AB)

الشكل رقم (٢٥) يوضح الكمرة الكلية (AB) ويؤثر عليها حملان مركزان عند (C , D) وهما عبارة عن ردى فعل الكمرة الجزئية (CD) ، ولايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه الكمرة ردود الأفعال الخارجية باستخدام شروط الاتزان المعروفة ، ثم نرسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء ، وبمقارنة الأشكال أرقام (٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥) نلاحظ الآتى : -

١. عزوم الانحناء فى حالة الكمرة الكلية (AB) والتى يؤثر عليها ردى فعل الكمرة الجزئية (CD) فقط يتطابق تماما مع الجزء ($a_1\ c_1\ d_1\ b_1$) من عزوم الكمرة الأصلية وعليها الأحمال الموزعة .
٢. عزوم الانحناء فى حالة الكمرة الجزئية (CD) يتطابق تماما مع الجزء ($c_1\ e_3\ e\ d_1$) من الكمرة الأصلية .

أى أن عزوم الانحناء الكلية للكمرة الأصلية تساوى مجموع عزوم الانحناء للكمرة الكلية الناتج من ردى فعل الكمرة الجزئية وعزوم الانحناء الناتج من الكمرة الجزئية ، وعلى هذا الأساس وعند استخدام طريقة الكمرات الجزئية يتم تقسيم المنشأ الأصلى الى مجموعة من الكمرات الجزئية ، على أساس أن كل كمرة جزئية تحدد ببداية ونهاية الحمل الموزع – مالم يكن داخل هذا الجزء حمل مركز أو عزم مركز ، فى هذه الحالة تحدد الكمرة الجزئية الأولى ببداية الحمل الموزع وحتى الحمل المركز أو العزم المركز وتحدد بداية الكمرة الجزئية الثانية بمكان تأثير الحمل المركز أو العزم المركز وتنتهى بنهاية الحمل الحمل الموزع أو وجود حمل مركز أو عزم مركز آخر وهكذا – وبعد تحديد الكمرات الجزئية المختلفة ، يتم ايجاد قيم عزوم الانحناء عند بداية ونهاية كل كمرة جزئية ، ثم يتم اضافة شكل عزوم الانحناء الناتج من الكمرات الجزئية الى عزوم الانحناء فى الكمرة الأصلية ، والأشكال أرقام (٢٦ الى ٣٥) تبين مجموعة من كمرات جزئية عليها مجموعة من الأحمال الموزعة المختلفة . وعلى هذا يمكن تلخيص خطوات استخدام طريقة الكمرات الجزئية على النحو التالى :-

١. توجد عزوم الانحناء عند بداية ونهاية كل كمرة جزئية .
٢. يتم رسم مضلع عزوم الانحناء وذلك بتوصيل قيم العزوم السابق ايجادها كل نقطة بالتى تليها ويعتبر الخط الواصل بين عزمى بداية ونهاية كل كمرة جزئية هو خط القاعدة لهذه الكمرة الجزئية .
٣. يتم تصحيح عزوم الانحناء عند كل كمرة جزئية وذلك باضافة شكل عزوم الانحناء للكمرة الجزئية الى الكمرة الكلية ، باعتبارها كمرة بسيطة وخط قاعدتها هو الخط الواصل بين عزمى بداية ونهاية هذه الكمرة الجزئية.
٤. يتم تهشير شكل عزوم الانحناء النهائى بين خط القاعدة الأصلى للكمرة الكلية ومنحنى العزم .

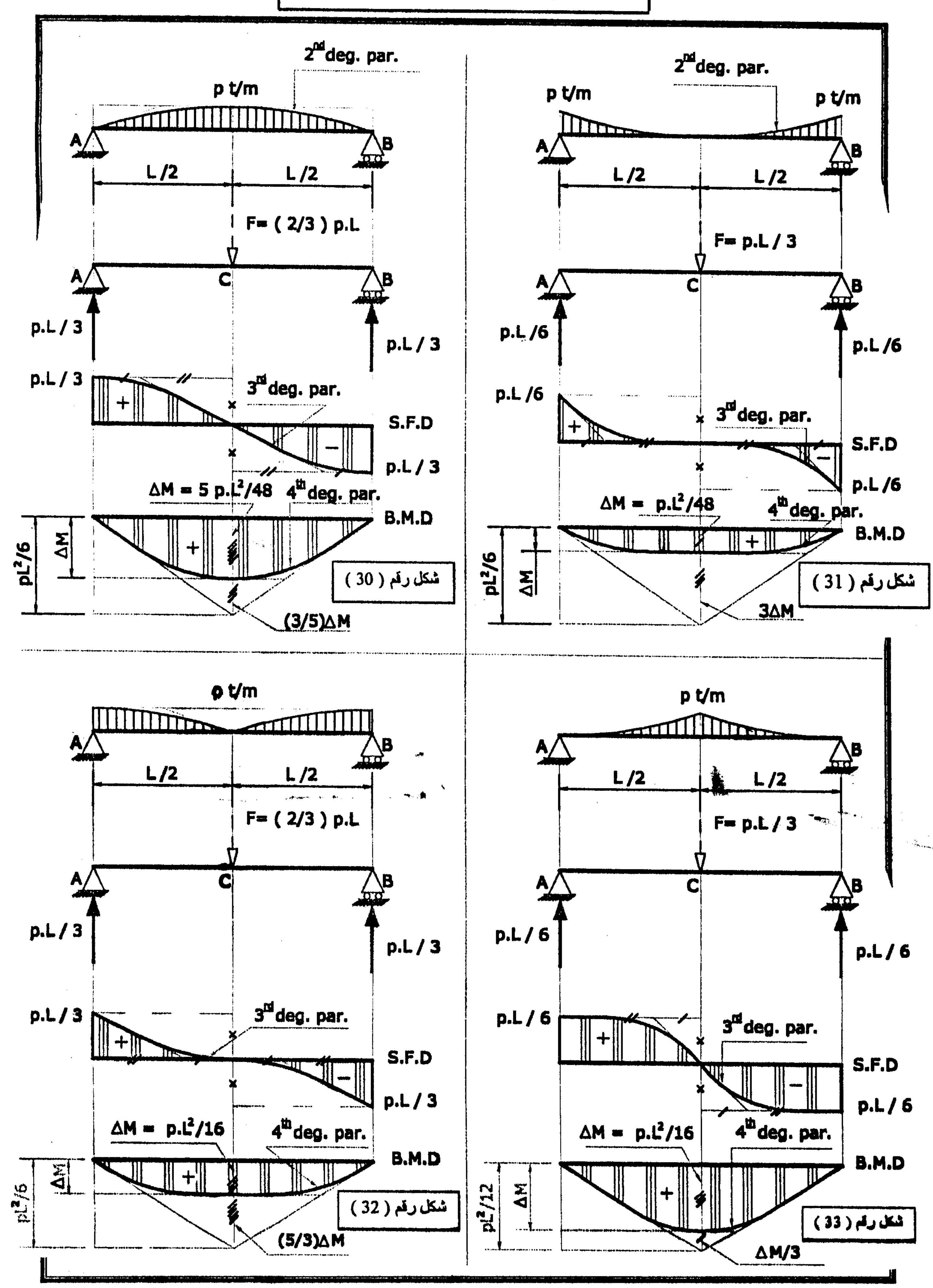


شكل رقم (26)

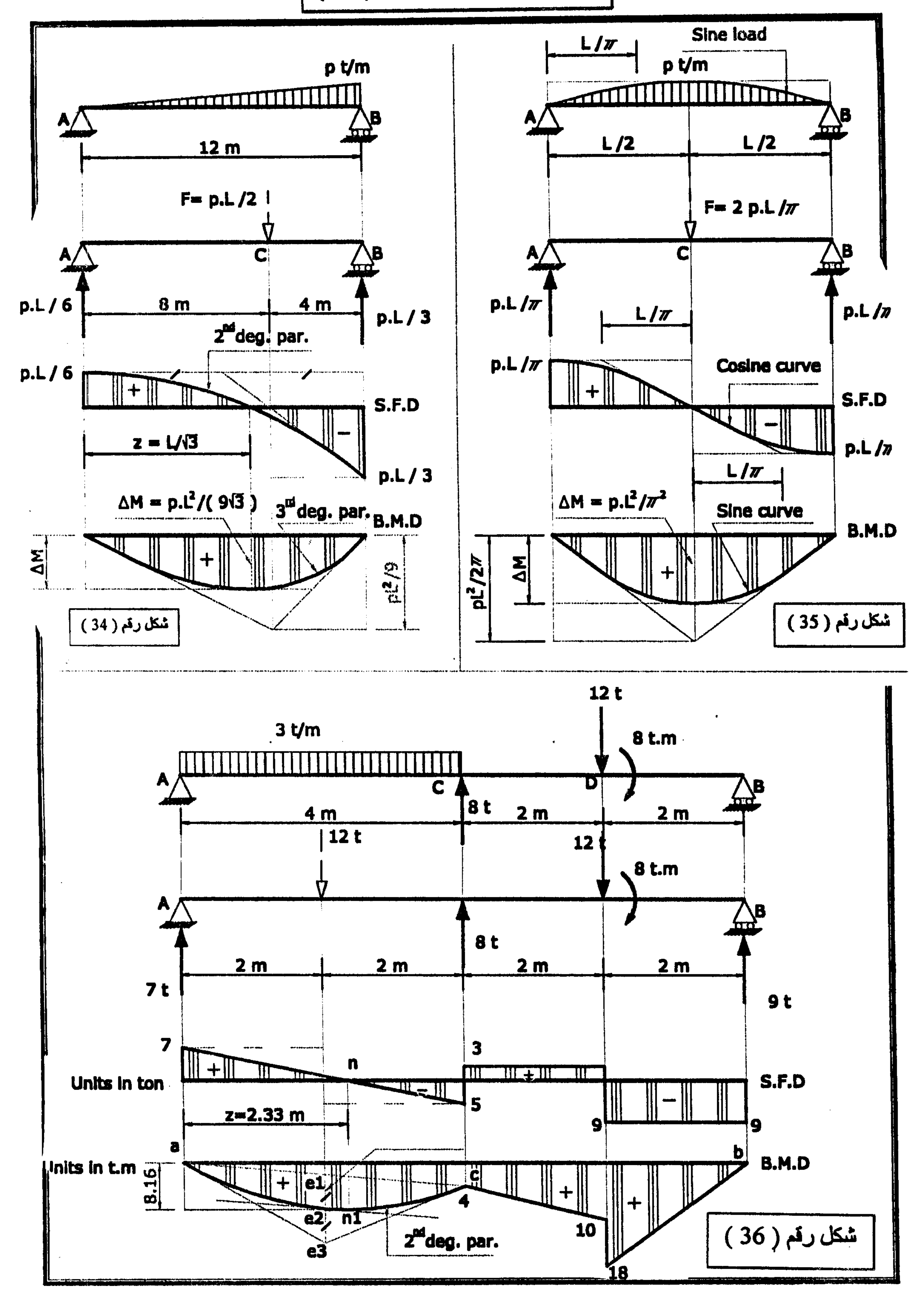
شكل رقم (27)

شكل رقم (28)

شكل رقم (29)



2nd deg. par.
p t/m
A
B
L /2
L /2
F= (2/3) p.L
C
p.L / 3
p.L / 3
3rd deg. par.
S.F.D
ΔM = 5 p.L²/48
4th deg. par.
B.M.D
pL²/6
ΔM
(3/5)ΔM
شكل رقم (30)
F= p.L / 3
p.L /6
ΔM = p.L²/48
3ΔM
شكل رقم (31)
ΔM = p.L²/16
(5/3)ΔM
شكل رقم (32)
p.L / 6
pL²/12
ΔM/3
شكل رقم (33)



p t/m
A
B
12 m
F= p.L /2
C
p.L / 6
8 m
4 m
p.L / 3
2nd deg. par.
S.F.D
z = L/√3
ΔM = p.L²/(9√3)
3rd deg. par.
B.M.D
ΔM
pL²/9
شكل رقم (34)
Sine load
L /π
p t/m
L /2
F= 2 p.L /π
p.L /π
Cosine curve
ΔM = p.L²/π²
Sine curve
pL²/2π
شكل رقم (35)
3 t/m
12 t
8 t.m
D
8 t
2 m
7 t
9 t
Units in ton
z=2.33 m
n
Units in t.m
8.16
e1
e2
n1
e3
2nd deg. par.
10
18
шكل رقم (36)

أمثلة عددية

مثال ٩

الشكل رقم (٣٦) يوضح كمرة بسيطة وعليها مجموعة من الأحمال المركزة والموزعة بالاضافة الى عزم مركز يؤثر عند نقطة (D) ، والمطلوب ايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه الكمرة .

الحل

يتم استبدال الحمل الموزع بحمل مركز مكافئ ويؤثر فى مركز ثقله ثم نوجد ردود الأفعال الخارجية بالطريقة المعتادة وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة ، ثم يتم رسم شكل قوى القص كما سبق ذكره فى الأمثلة السابقة ، وبعد ذلك يتم حساب عزوم الانحناء على النحو التالى : -

$Ma = 0.0$, $Mc = 7*4 - 12*2 = 4$ t.m

$Md_l = 7*6 - 12*4 + 8*2 = 10$ t.m , $Md_r = 9*2 = 18$ t.m , $Mb = 0.0$

For partial Beam (AC) , $\Delta M = p.L^2 / 8 = 3*(4)^2 / 8 = 6$ t.m

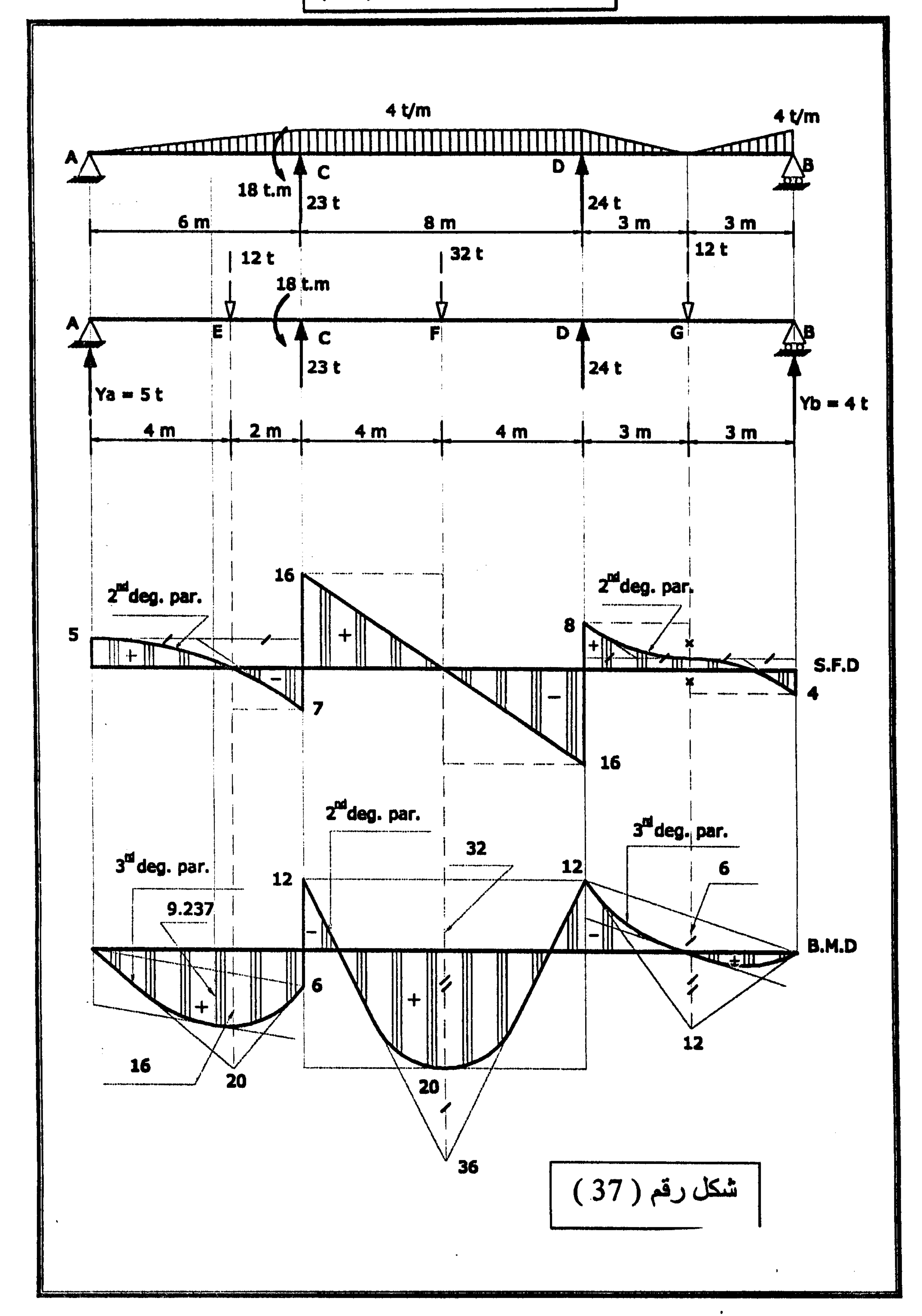
بعد حساب قيم عزوم الانحناء عند النقاط المختلفة يتم رسم شكل عزوم الانحناء كما هو موضح بالشكل رقم (٣٦) ، مع ملاحظة أنه عندما يتم رسم شكل عزوم الانحناء فى الجزء (AC) يتم توقيع قيمة عزم الكمرة الجزئية (ΔM) من منتصف خط القاعدة (ac) أى من نقطة (e_1) وفى اتجاه تأثير الحمل الموزع لنحصل على نقطة (e_2) ومن نقطة (e_2) يتم رسم خط يوازى خط القاعدة (ac) ويعتبر هذا الخط هو المماس لمنحنى العزوم عند نقطة (e_2) ولكى نحصل على النقطة (e_3) – نقطة التقاء المماسين الآخرين - يتم توقيع (ΔM) من النقطة (e_2) وفى نفس اتجاه تأثير الحمل الموزع ، وذلك لأنه فى حالة الحمل الموزع بانتظام تكون نسبة التقسيم بين قيمتى العزم ($e_1 e_2$, $e_2 e_3$) هى (1 : 1) ، وبعد ذلك يتم رسم شكل منحنى العزوم فى الجزء (AC) وهو منحنى من الدرجة الثانية بحيث يمر بالنقط (a , e_2 , c) ويمس المماسين (a e_3 , c e_3) والمماس عند نقطة (e_2) ولزيادة دقة رسم هذا المنحنى يتم ايجاد نقطة رابعة عليه وهى نقطة (n_1) وهى النقطة المناظرة لنقطة (n) – نقطة تلاشى القص (zero shear) – ونلاحظ أن هذه النقطة تبعد عن الركيزة (A) بمقدار (z) حيث ($z = 2.333$ m) وعندها يكون أقصى عزم موجب هو $Mmax = 8.1666$ t.m) – **راجع كيفية حساب مكان نقط تلاشى قوى القص وكذلك حساب أقصى عزم موجب فى الأمثلة السابقة** - وبتوقيع هذه القيمة نحصل على النقطة (n_1) ومن هذه النقطة نرسم مماس أفقى ، ليصبح هذا المنحنى يمر بأربع نقاط ويمس أربعة مماسات ، أنظر شكل رقم (٣٦) .

مثال ١٠ ، مثال ١١

الشكلين رقمى (٣٧ ، ٣٨) يوضحان أشكال قوى القص وعزوم الانحناء لكل من الكمرة البسيطة (ABCD) والكمرة ممتدة الطرفين (CAEFBD) وذلك نتيجة للأحمال الموضحة على كل منهما ، ومن السهل تتبع خطوات الحل وذلك بالاستعانة بالمثال رقم (٩) وأشكال الكمرات الجزئية السابق ذكرها فى الأشكال أرقام (٢٦ الى ٣٥) .

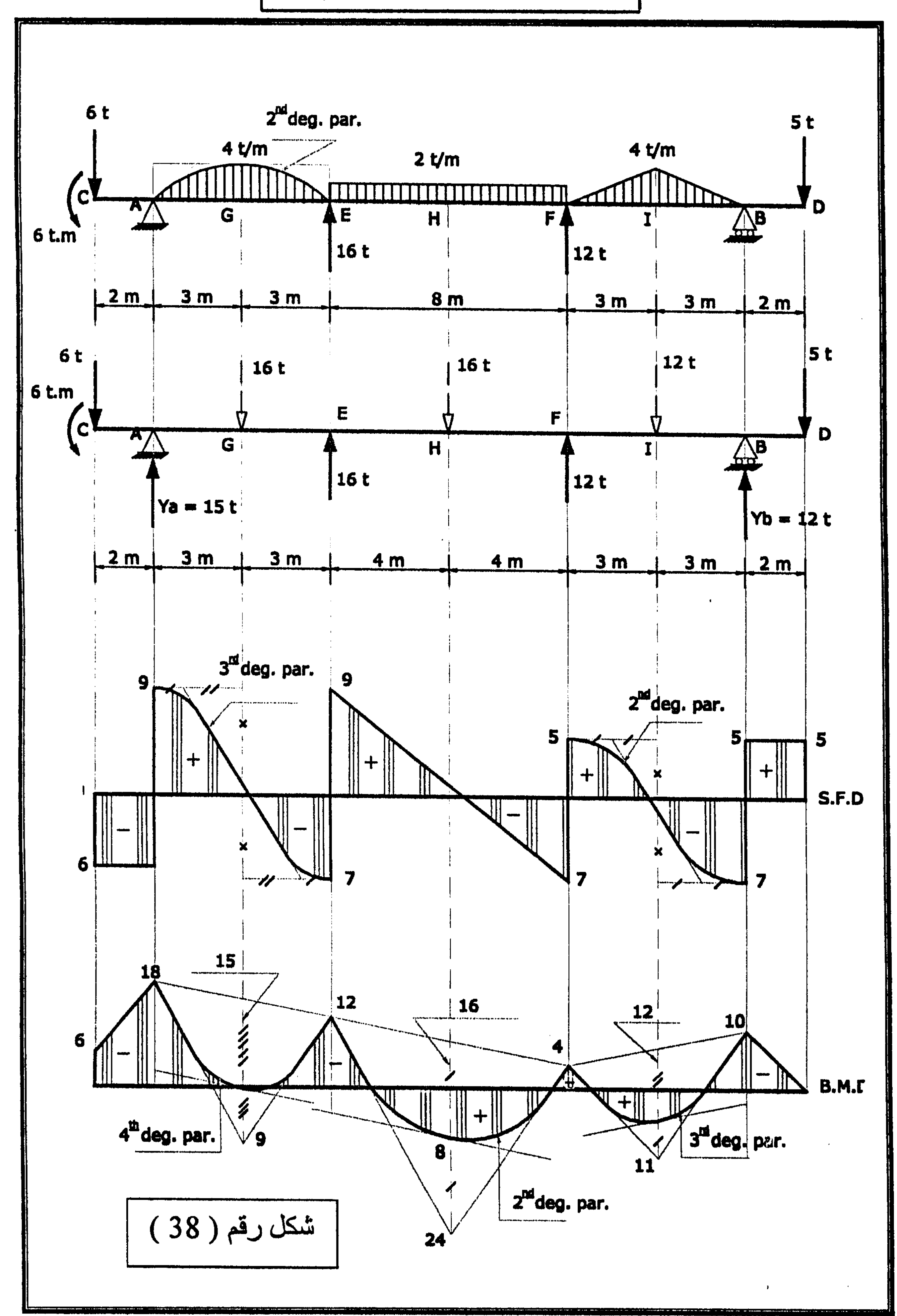
حالة عزم مركز داخل حمل موزع

اذا وجد عزم مركز داخل حمل موزع فان شكل القص لايتأثر بمكان تأثير العزم ، بينما شكل العزم يحدث له تغير مفاجئ عند مكان تأثير العزم المركز لذلك يتم فصل الحمل الموزع على جانبى العزم المركز ، كما فى المثال التوضيحى الآتى : -



4 t/m
4 t/m
A
C
D
B
18 t.m
23 t
24 t
6 m
8 m
3 m
3 m
12 t
32 t
12 t
18 t.m
A
E
C
F
D
G
B
23 t
24 t
Ya = 5 t
Yb = 4 t
4 m
2 m
4 m
4 m
3 m
3 m
16
2nd deg. par.
2nd deg. par.
5
8
7
16
4
S.F.D
2nd deg. par.
3rd deg. par.
3rd deg. par.
32
12
12
6
9.237
6
B.M.D
16
20
20
12
36

شكل رقم (37)


6 t
2nd deg. par.
4 t/m
2 t/m
4 t/m
5 t
C
A
G
E
H
F
I
B
D
6 t.m
16 t
12 t
2 m
3 m
3 m
8 m
3 m
3 m
2 m
16 t
16 t
12 t
Ya = 15 t
Yb = 12 t
4 m
4 m
3rd deg. par.
2nd deg. par.
S.F.D
B.M.D
4th deg. par.
3rd deg. par.
2nd deg. par.
18
15
12
16
12
10
24

شكل رقم (38)

مثال توضيحى

الشكل رقم (٣٩) يوضح كمرة بسيطة (AB) ويؤثر عليها حمل موزع بانتظام بكامل طولها ، كما يؤثر عليها عزم مركز قيمته (M) عند نقطة (C) ، والمطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه الكمرة .

الحل

حيث أن قيم ردود الأفعال وقيم القص لاتتأثر بمكان تأثير العزم لذلك سوف يتم استبدال الحمل الموزع بحمل مركز مكافئ واحد وذلك لسهولة الحسابات ، ثم يتم بعد ذلك حساب ردود الأفعال الخارجية ومن ثم رسم شكل قوى القص . ولكى نرسم شكل عزوم الانحناء يجب فصل الحمل الموزع الى جزءين على جانبى العزم المركز واعتبار كل جزء عبارة عن كمرة جزئية مستقلة ويتم رسم عزوم الانحناء كما سبق ذكره فى الأمثلة السابقة . نلاحظ أن رسم شكل عزوم الانحناء بهذه الطريقة – طريقة فصل الحمل الموزع على جانبى العزم المركز – قد يبدو فى هذا المثال سهلا ويسيرا وذلك لأن الحمل هنا حملا موزعا بانتظام ، ولكن هذا الحل يكون صعبا فى حالة ما اذا كان الحمل الموزع عبارة عن حمل مثلثى ويكون صعبا للغاية فى حالة ما اذا كان الحمل الموزع من الدرجة الثانية أو من درجات أعلى ، لذلك سوف نلجأ الى طريقة أخرى تصلح لجميع أنواع الأحمال وفى نفس الوقت سهلة ويسيرة فى الاستخدام . ولتوضيح هذه الطريقة سوف نعيد حل المثال التوضيحى السابق وذلك كالآتى : -.

١. يتم نقل عزم الانحناء المركز (M) الى الركيزة (A) وفى نفس اتجاهه ، ثم يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء لهذه الحالة ، كما بالشكل رقم (٤٠ - ا) .
٢. يتم نقل عزم الانحناء المركز (M) الى الركيزة (B) وفى نفس اتجاهه ، ثم يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء لهذه الحالة ، كما بالشكل رقم (٤٠ - ب) .

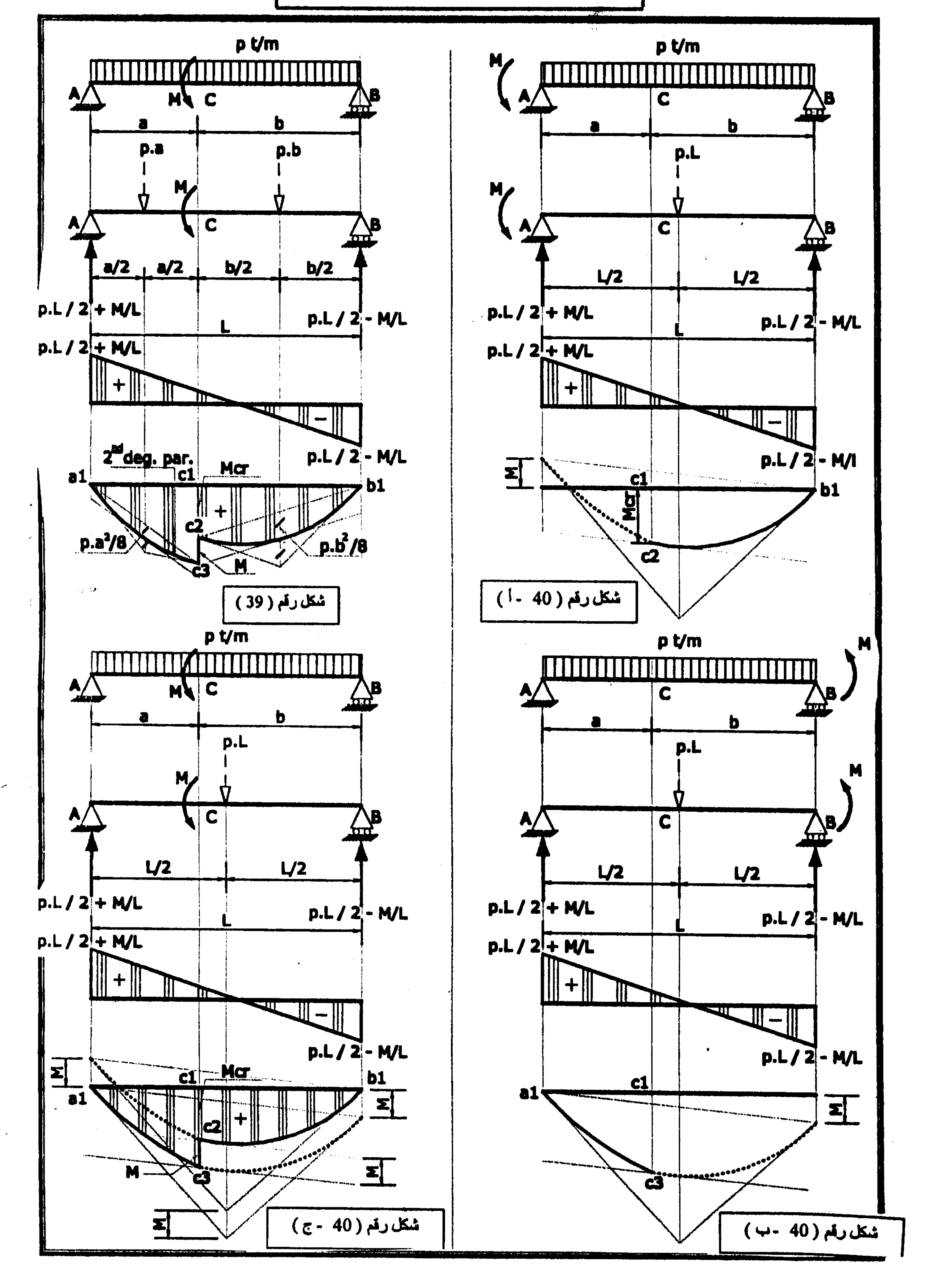
من الحالات السابقة نلاحظ الآتى : -

- أن شكل القص لجميع الحالات السابقة ثابت .
- عندما يكون العزم المركز عند الركيزة (A) ، نلاحظ أن الجزء ($c_1\ c_2\ b_1$) من عزوم الانحناء الموضح فى الشكل رقم (٤٠ - ا) يكون متطابق تماما مع الجزء ($c_1\ c_2\ b_1$) من عزوم الانحناء الموضح فى الشكل رقم (٣٩) – أى عندما يكون العزم المركز عند نقطة (C) .
- عندما يكون العزم المركز عند الركيزة (B) ، نلاحظ أن الجزء ($a_1\ c_1\ c_3$) من عزوم الانحناء الموضح فى الشكل رقم (٤٠ - ب) يتطابق تماما مع الجزء ($a_1\ c_1\ c_3$) من عزوم الانحناء الموضح فى الشكل رقم (٣٩) – أى عندما يكون العزم المركز عند نقطة (C) .
- ميل المماس لكلا المنحنيين عند أى قطاع يكون ثابت وذلك لأن شكل القص ثابت ، وعلى ذلك يكون المنحنيان السابقان متوازيان .

ولرسم شكل عزوم الانحناء لمثل هذه الحالات في سهولة ويسر، يتم رسم شكلين متوازيين لعزوم الانحناء على أن تكون مسافة التوازى بينهما تساوى قيمة العزم المركز (M) ، ويمر أحد الشكلين بالنقطة المناظرة للركيزة (A) والمنحنى الآخر يمر بالنقطة المناظرة للركيزة (B) ، ثم بعد ذلك يتم رسم خط رأسى من نقطة (C) - نقطة تأثير العزم المركز (M) – ليقطع المنحنيين المتوازيين فى النقطتين (c_2 , c_3) ليصبح المنحنى النهائى لشكل عزوم الانحناء هو ($a_1\ c_3\ c_2\ b_1$) ، انظر شكل رقم (٤٠ - ج) .

مثال ١٢-أ

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (٤١ – أ) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .



شكل رقم (39)

شكل رقم (40 - أ)

شكل رقم (40 - ج)

شكل رقم (40 - ب)

- $\Sigma M @ A = 0.0$ i.e. $15 * 6 - 15 * 10 + 12 * 15 - 6 * 18 - Ma = 0.0$
  or $Ma = 12$ t.m
- Check , $Md_{left} = 12 - 6 * 2 = 12 - 12 = 0.0$ $\therefore$ O.K.

بعد ايجاد ردود الأفعال الخارجية ، يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بالطريقة المعتادة أنظر شكل رقم (٤٣) .

مثال ١٤

للكمرة المفصلية المركبة الموضحة بالشكل رقم (٤٤) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

فى هذا المثال أيضا سوف يتم استخدام الطريقة الأولى فى حساب ردود الأفعال الخارجية وذلك على النحو التالى : -

- $Me_{right} = 0.0$, or $16 * 7 - 2 * Yb - 10 * Yc = 0.0$
  Or , $56 - Yb - 5Yc = 0.0$ ……………(1)
- $Md_{right} = 0.0$, or $12 * 4 - 8 * Yb + 16 * 13 - Yc * 16 = 0.0$
  Or , $32 - Yb - 2Yc = 0.0$ ……………(2)

بحل المعادلتين (١ ، ٢) ينتج أن :-

$Yb = 16$ t , $Yc = 8$ t .

- $\Sigma Y = 0.0$ i.e $Ya = (4 + 12 + 16) - (16 + 8) = 32 - 24 = 8$ t .
- $Md_{left} = 0.0$ i.e. $Ma - 8 * 2 = 0.0$, $\therefore$ $Ma = 16$ t.m .
- Check , $Me_{left} = 16 + 4 * 6 + 12 * 2 - 8 * 8 = 64 - 64 = 0.0$ $\therefore$ O.K.

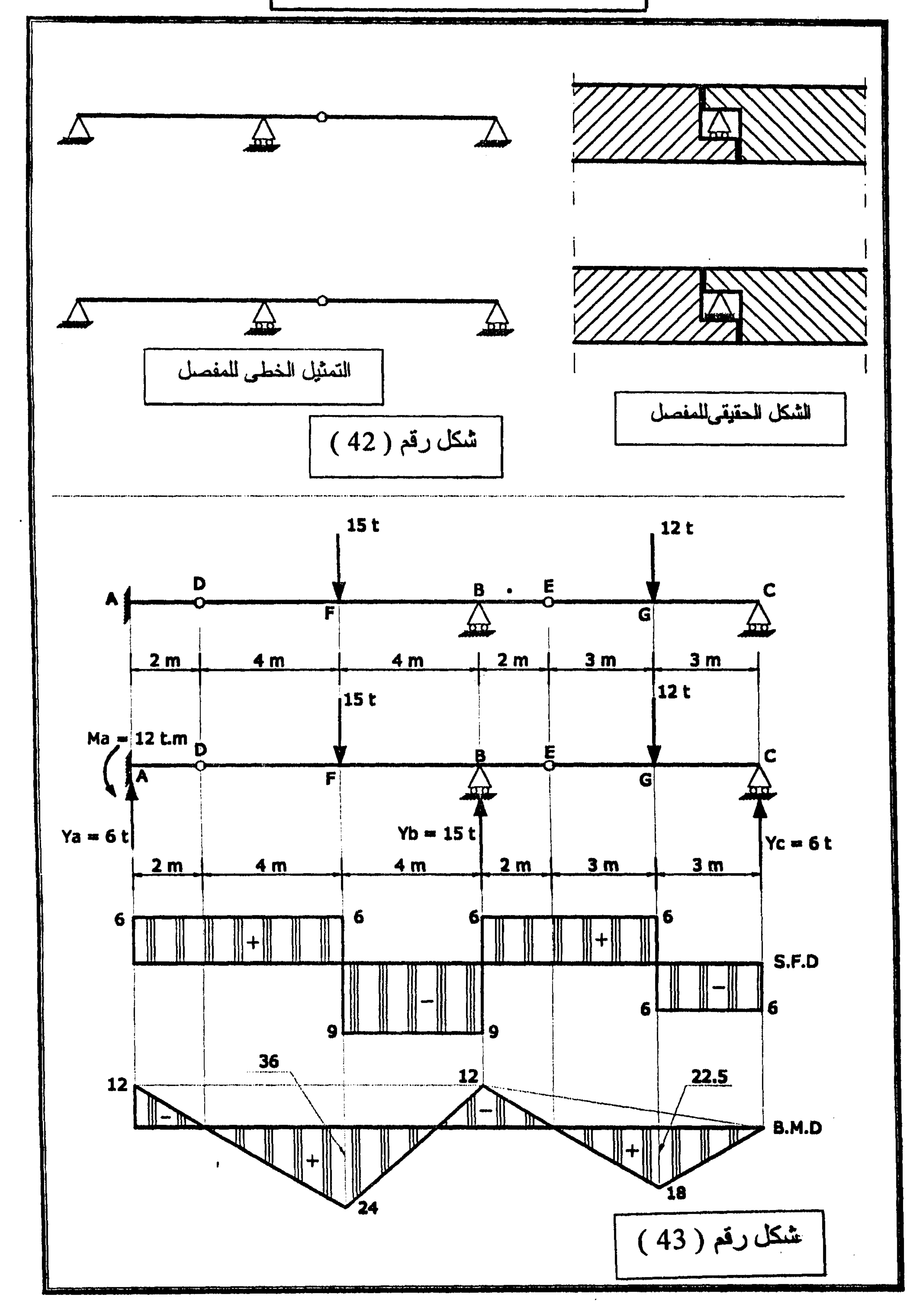
بعد ايجاد ردود الأفعال الخارجية ، يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بالطريقة المعتادة أنظر شكل رقم (٤٤) .

نلاحظ فى المثالين (١٣ ، ١٤) أن طريقة تطبيق شروط الاتزان المعروفة على الكمرة المفصلية المركبة ككل تستغرق وقتا طويلا بالاضافة الى أنها تزداد صعوبة كلما زاد عدد الفتحات الموجودة للكمرة المفصلية كما أن طريقة توزيع المفاصل الداخلية تلعب دورا هاما فى سهولة أو صعوبة الحل بهذه الطريقة فمثلا نلاحظ أن ايجاد ردود الأفعال فى المثال رقم (١٣) أسهل بكثير من ايجاد ردود الأفعال فى المثال رقم (١٤) وذلك على الرغم من أن كلا المثالين لهما نفس عدد الفتحات ونفس عدد المفاصل الا ان الفرق هو فى طريقة ترتيب ووضع المفاصل الداخلية ، لذلك سوف نعيد حل المثالين (١٣ ، ١٤) بطريقة الأجزاء الانشائية .

مثال ١٣ مكرر

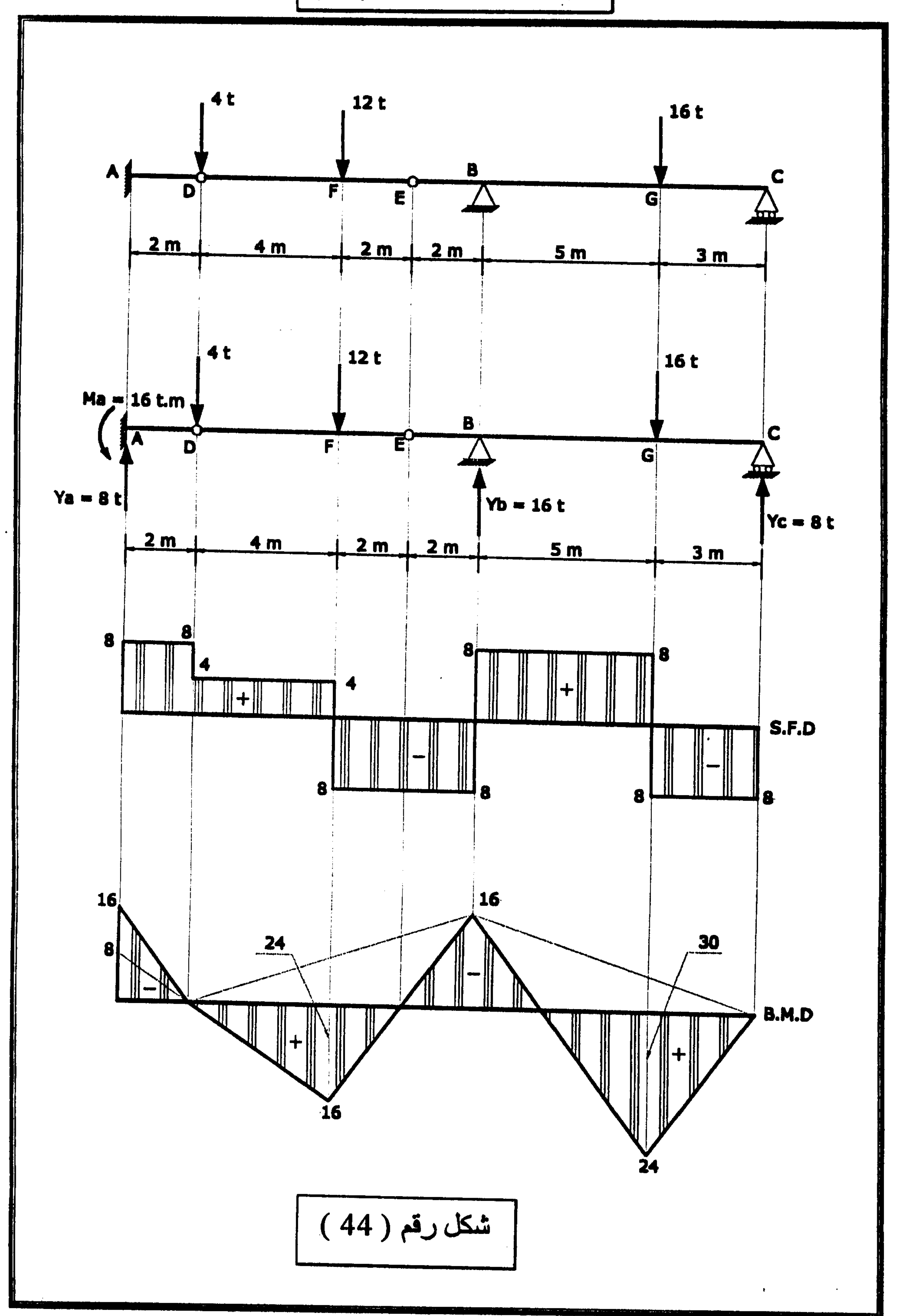
الشكل رقم (٤٥) يوضح كيفية تقسيم الكمرة المفصلية المركبة الى الأجزاء الانشائية الأتية : -

أولا : الجزء (EC) ويتم فصله عند المفصل الداخلى (E) وهذا الجزء لايستطيع حمل نفسه وهو محمول على بقية أجزاء الكمرة ، لذلك سوف يتم وضع ركيزة مفصلية عند نقطة (E) ليصبح هذا الجزء عبارة عن كمرة بسيطة .

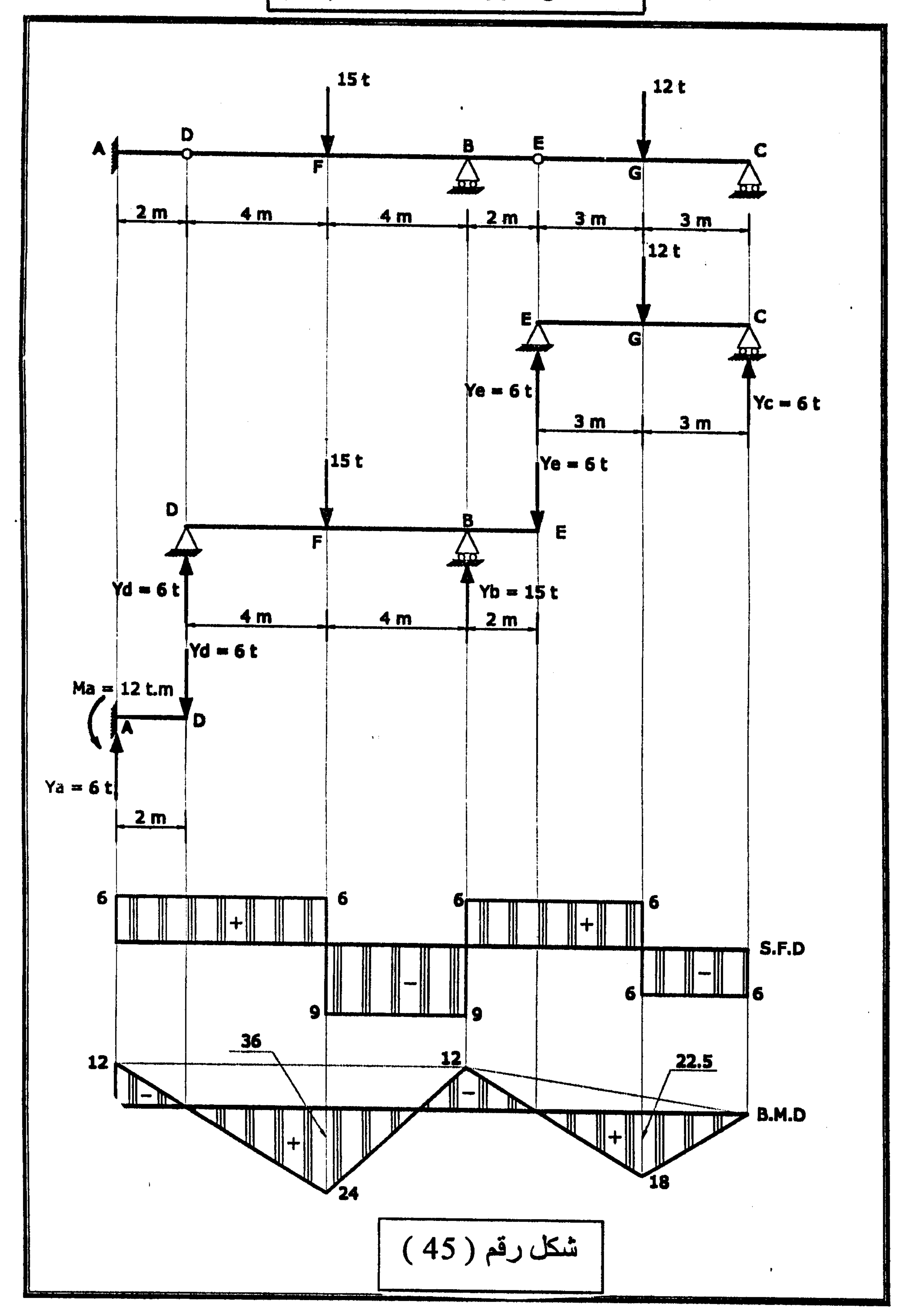


شكل رقم (42)

شكل رقم (43)


4 t
12 t
16 t
A
D
F
E
B
G
C
2 m
4 m
2 m
2 m
5 m
3 m
Ma = 16 t.m
Ya = 8 t
Yb = 16 t
Yc = 8 t
S.F.D
B.M.D
8
4
16
24
30
+
–

شكل رقم (44)



15 t
12 t
A
D
B
E
C
F
G
2 m
4 m
4 m
2 m
3 m
3 m
12 t
E
C
G
Ye = 6 t
Yc = 6 t
3 m
3 m
15 t
Ye = 6 t
D
B
E
F
Yd = 6 t
Yb = 15 t
4 m
4 m
2 m
Yd = 6 t
Ma = 12 t.m
A
D
Ya = 6 t
2 m
6
6
6
6
+
+
S.F.D
-
-
9
9
6
6
36
12
12
22.5
-
-
B.M.D
+
+
24
18

شكل رقم (45)

ثانيا : الجزء (DE) ويتم فصله عند المفصل الداخلى (D) وهذا الجزء أيضا لايستطيع حمل نفسه وهو فى نفس الوقت يحمل الجزء الأول (EC) عن طريق رد الفعل عند المفصل (E) ، لذلك سوف يتم وضع ركيزة مفصلية عند المفصل (D) ليصبح هذا الجزء عبارة عن كمرة ممتدة الطرف .

ثالثا : الجزء (AD) وهو عبارة عن كابولى وهو بطبيعة الحال يحمل نفسه ، كما يحمل الجزء (DE) وبالتالى يحمل الجزء (EC) .

ويتم رسم هذه الأجزاء الثلاثة فى ترتيب تنازلى من أعلى الى أسفل ، حيث توضع الأجزاء المحمولة الى أعلى والأجزاء الحاملة الى أسفل ، أنظر شكل رقم (٤٥) . ويتم دراسة اتزان كل كمرة على حدة وذلك على النحو التالى : -

أولا : ندرس اتزان الكمرة (EC) وذلك عن طريق تطبيق شروط الاتزان الثلاثة المعروفة ومنها نوجد ردى الفعل عند (E , C) وهما (Ye = 6 t , Yc = 6 t) .

ثانيا : يتم عكس اتجاه رد الفعل عند الركيزة (E) على الكمرة الممتدة الطرف (DBE) ، وبنفس الطريقة نوجد ردى الفعل للكمرة الممتدة (DBE) وهى على النحو التالى : -

$\Sigma M @ D = 0.0$ i.e. $15 * 4 + 6 * 10 - Yb * 8 = 0.0$, or $Yb = 15$ t .

$\Sigma M @ B = 0.0$ i.e. $15 * 4 - 6 * 2 - Yd * 8 = 0.0$, or $Yd = 6$ t .

Check , $\Sigma Y = (6 + 15) - (15 + 6) = 21 - 21 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثالثا : الجزء (AD) ، يتم عكس رد الفعل (Yd) على الكابولى (AD) ويتم تطبيق شروط الاتزان الثلاثة المعروفة ومنها نوجد ردود الفعل عند الركيزة (A) وهى على النحو التالى : -

$\Sigma Y = 0.0$, i.e. $Ya = Yd = 6$ t .

$\Sigma M @ A = 0.0$, i.e. $Yd * 2 - Ma = 0.0$, or $Ma = 6 * 2 = 12$ t.m .

وبعد ذلك يتم رسم شكلى قوى القص وعزوم الانحناء بالطريقة المعتادة أنظر شكل رقم (٤٥) .

مثال ١٤ مكرر

الشكل رقم (٤٦) يوضح نفس الكمرة المفصلية المركبة السابق حلها فى المثال رقم (١٤) ، ولكن سوف يتم حلها فى هذا المثال بطريقة الأجزاء الانشائية . وخطوات حل هذا المثال هى نفسها خطوات حل المثال رقم (١٣ مكرر) .

رسم شكل عزوم الانحناء مباشرة (قبل ايجاد ردود الأفعال الخارجية)

يمكن رسم شكل عزوم الانحناء مباشرة وذلك بالبدء من عند الأماكن معلومة العزوم مثل الركائز الطرفية أو الأجزاء الممتدة أو المفاصل الداخلية . ويتم رسم شكل عزوم الانحناء بين الأجزاء معلومة العزوم ، وبتطبيق شرط ميل المماس لعزم الانحناء عند نقطة معينة يساوى قيمة القص عند هذه النقطة ، وبمعرفة ميل المماس لعزم الانحناء عند أماكن وجود المفاصل - (حيث أن القص على يمين المفصل مباشرة يساوى القص على يسار المفصل مباشرة وذلك مالم يوجد حمل مركز على المفصل) - يمكن الاستفادة منها فى ايجاد العزم عند الركائز الداخلية التى تجاور المفاصل الداخلية وذلك باستخدام طريقة التجميع ، بمعنى أنه اذا كان هناك حملا مركزا أو موزعا فى الجزء المحصور بين المفصل الداخلى والركيزة الداخلية المجاورة له فان عزم الانحناء عند الركيزة الداخلية يساوى قيمة العزم الناتج من امتداد المماس لعزوم الانحناء عند المفصل الداخلى بالاضافة الى عزم الانحناء الناتج من الحمل الموجود على الجزء المحصور بين المفصل والركيزة الداخلية . وبعد رسم شكل عزوم الانحناء يتم ايجاد ردود الأفعال الخارجية عن طريق معرفة العزوم عند الركائز الداخلية وذلك بتطبيق شروط الاتزان ، ثم بعد ذلك يتم رسم شكل قوى القص . كما أنه يمكن رسم شكل قوى القص مباشرة من عزوم الانحناء ودون الاستعانة بردود الأفعال الخارجية وذلك باستخدام العلاقة التفاضلية (/ dM

(dX = Q) – ميل المماس لعزم الانحناء عند نقطة معينة يساوى قيمة القص عند نفس النقطة – وبعد ايجاد شكل قوى القص يمكن ايجاد ردود الفعل الخارجية بسهولة ويسر وذلك على النحو التالى : -

رد الفعل عند أى ركيزة = فرق قوى القص على جانبى هذه الركيزة مباشرة

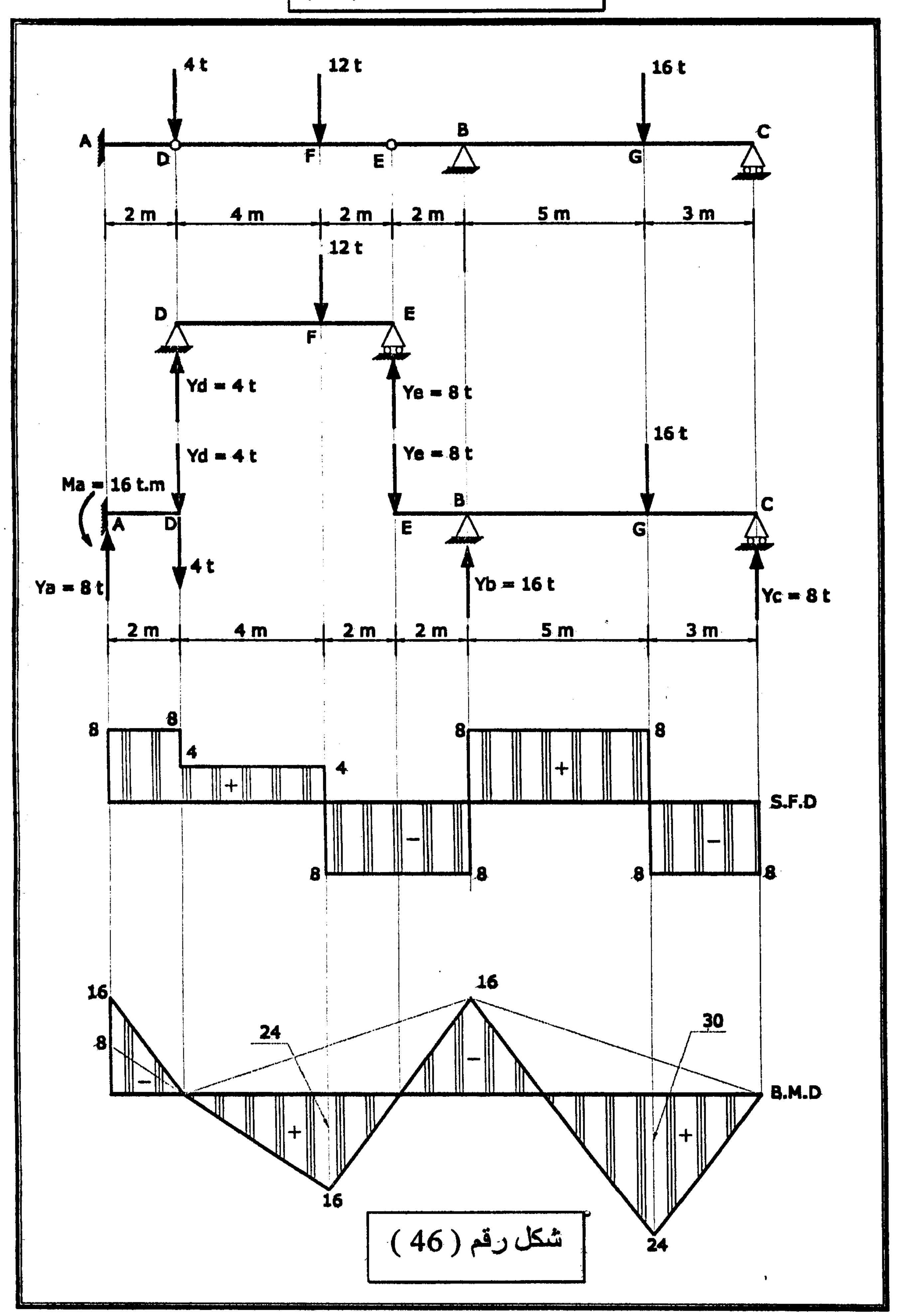
مثال ١٥

الشكل رقم (٤٧) يوضح كمرة مفصلية مركبة وعليها مجموعة من الأحمال الموزعة والمركزة والعزوم المركزة والمطلوب رسم شكل عزوم الانحناء مباشرة ، ثم استنتاج شكل قوى القص ومن ثم ايجاد ردود الأفعال الخارجية ، أو استنتاج ردود الفعل الخارجية مباشرة من شكل عزوم الانحناء ثم بعد ذلك يتم رسم شكل قوى القص .

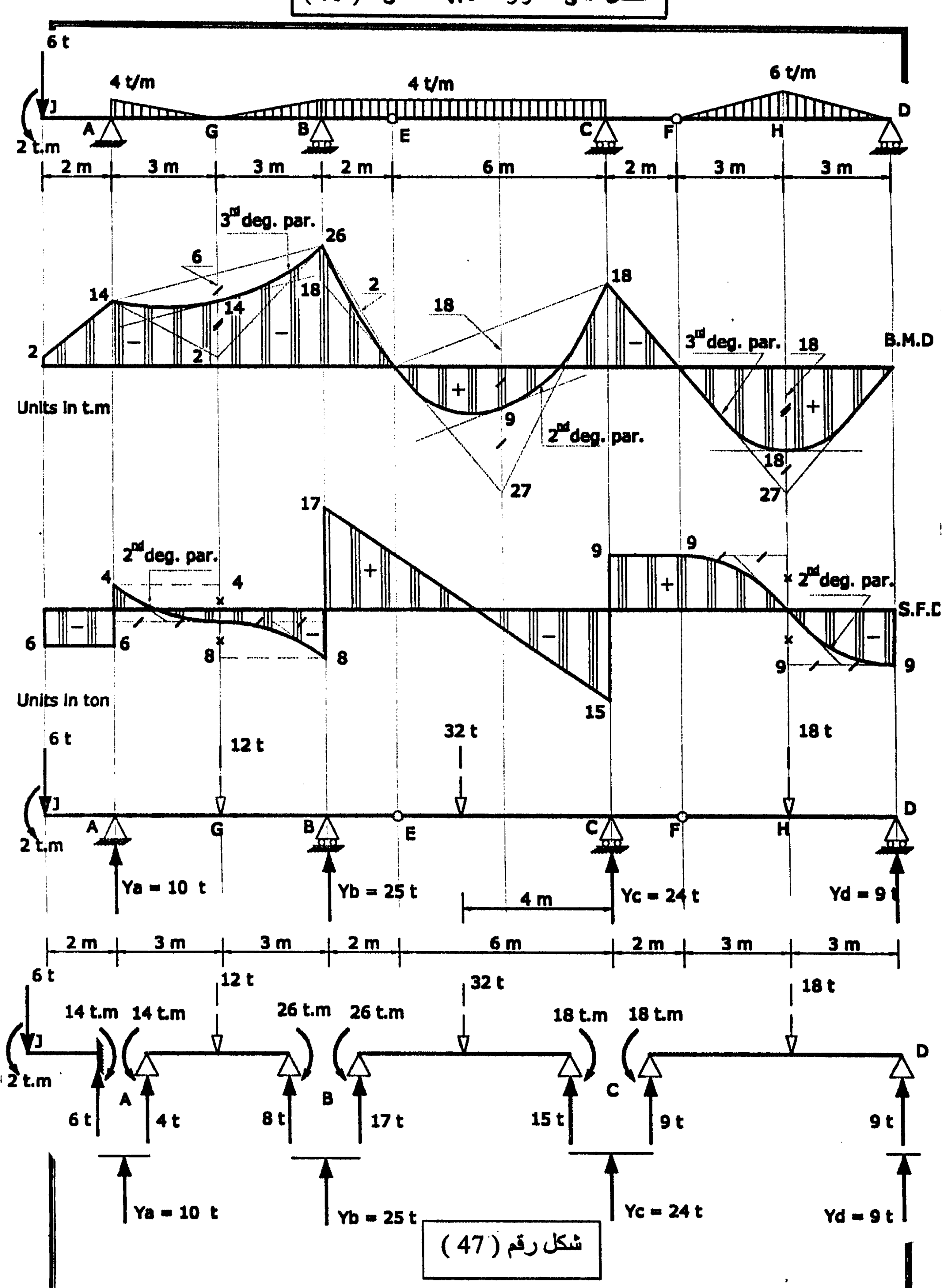
الحل

نبدأ رسم شكل عزوم الانحناء من احد جانبى الكمرة المفصلية المركبة ، وفى هذا المثال سوف نبدأ من اليمين حيث أن العزم عند الركيزة (D) يساوى صفر لأنها ركيزة طرفية ، وكذلك العزم عند المفصل (F) يساوى صفر وباستخدام الكمرات الجزئية يتم رسم عزم الانحناء للجزء (FD) . وبمد المماس لعزم الانحناء عند المفصل (F) حتى يلاقى الخط الرأسى من الركيزة (C) يكون عزم الانحناء عند الركيزة (C) هو (- ١٨ طن .متر) ويتم رسم شكل عزوم الانحناء للجزء (EC) - حيث أن العزم عند المفصل (C) يساوى صفر - بنفس الطريقة السابقة ، ولايجاد عزم الانحناء عند الركيزة (B) يتم مد المماس لعزم الانحناء عند المفصل (E) ليلاقى الخط الرأسى الواصل من الركيزة (B) ليكون العزم الناتج من هذا التلاقى هو (- ١٨ طن . متر) وحيث أن الجزء (BE) محمل بحمل موزع بانتظام ، وأن العزم الاضافى الناتج من الحمل الموزع على هذا الجزء هو (- ٨ طن . متر) وبذلك يكون العزم الكلى عند الركيزة (B) هو (- ٢٦ طن . متر) . ويتم رسم شكل عزوم الانحناء للجزء (AB) بنفس الطريقة حيث أن العزم عند الركيزة (A) معلوم وهو (- ١٤ طن . متر) . وكذلك يتم رسم شكل عزوم الانحناء للطرف الممتد من الركيزة (A) ، أنظر شكل رقم (٤٧) . ولرسم شكل قوى القص باستخدام عزوم الانحناء يتم الاستعانة بالعلاقات السابق ذكرها ، ومنها أن ميل المماس لشكل عزوم الانحناء عند نقطة معينة يساوى قيمة القص عند هذه النقطة ، وكذلك أن درجة منحنى القص يزيد درجة عن منحنى الحمل . فمثلا لكى نرسم شكل قوى القص للفتحة (CFD) نلاحظ أن ميل المماس لعزم الانحناء على يمين الركيزة (C) مباشرة يساوى (٢/١٨ = ٩ طن = القص على يمين C مباشرة) وحيث أن الجزء (CF) خالى من الأحمال فان القص على هذا الجزء يكون ثابت القيمة وهى (+ ٩ طن) ونلاحظ كذلك أن ميل المماس لعزم الانحناء عند الركيزة (D) يساوى (-٣/٢٧ = -٩ طن = القص عند الركيزة A ، ونلاحظ أن الحمل فى الجزء (FD) عبارة عن حمل مثلثى أى من الدرجة الأولى لذلك سوف يكون القص عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية ، ولرسم هذا المنحنى سوف يتم رسم مماس أفقى لقيمة القص عند المفصل (F) وكذلك رسم مماس أفقى لقيمة القص عند الركيزة (A) – (حيث أن ميل المماس لشكل قوى القص = - كثافة الحمل) – وبتحديد نقطة الانقلاب فى شكل القص وهى فى منتصف المسافة الرأسية بين قيمتى القص عند (F , D) وعلى الخط الرأسى الواصل من النقطة (H) – حيث توجد الكثافة القصوى للحمل – ويتم بعد رسم المماس المشترك من نقطة الانقلاب وحتى منتصف المماسين الأفقيين عند النقطتين (F , D) ، وبعدها يتم رسم منحنى القص لهذة الفتحة . وبنفس الطريقة يتم استكمال رسم شكل قوى القص ، أنظر شكل رقم (٤٧) . وبعد ذلك يتم ايجاد ردود الأفعال الخارجية من شكل قوى القص وذلك على النحو التالى : -

$Ya = 4 - (- 6) = 10\ t.$
$Yb = 17 - (- 8) = 25\ t.$
$Yc = 9 - (- 15) = 24\ t.$
$Yd = - (- 9) = 9\ t.$


4 t
12 t
16 t
A
D
F
E
B
G
C
2 m
4 m
2 m
2 m
5 m
3 m
Yd = 4 t
Ye = 8 t
Ma = 16 t.m
Ya = 8 t
Yb = 16 t
Yc = 8 t
S.F.D
B.M.D

شكل رقم (46)


6 t
4 t/m
4 t/m
6 t/m
2 t.m
J A G B E C F H D
2 m 3 m 3 m 2 m 6 m 2 m 3 m 3 m
3rd deg. par.
26
14
18
B.M.D
Units in t.m
2nd deg. par.
27
17
2nd deg. par.
S.F.D
Units in ton
15
12 t
32 t
18 t
Ya = 10 t
Yb = 25 t
Yc = 24 t
Yd = 9 t
4 m
14 t.m
26 t.m
18 t.m

شكل رقم (47)

كما يمكن ايجاد ردود الأفعال الخارجية من شكل عزوم الانحناء مباشرة ، ثم بعد ذلك ايجاد شكل قوى القص وذلك كما يلى : -

١. يتم تقسيم الكمرة المفصلية المركبة الى مجموعة من الفتحات الرئيسية ، واعتبار كل فتحة عبارة عن كمرة بسيطة (بعد الغاء المفاصل الداخلية) ويتم وضع الأحمال الأصلية عليها وكذلك وضع عزوم النهايات على طرفى الكمرة البسيطة وذلك من واقع شكل عزوم الانحناء .
٢. يتم عمل اتزان لكل كمرة على حدة وذلك باستخدام شروط الاتزان المعروفة ، ومنها نوجد ردود الأفعال الخارجية لها ، وردود الأفعال فى هذه الحالة تعبر عن قيمة القص فى بداية ونهاية كل كمرة ومنها يمكن رسم شكل قوى القص.
٣. يكون رد الفعل النهائى عند كل ركيزة هو عبارة عن مجموع ردى الفعل للكمرتين البسيطتين عندها .
٤. أى جزء ممتد يعامل على أنه كابولى .

الشكل رقم (٤٧) يوضح الخطوات السابقة .

مثال ١٦

الشكل رقم (٤٨) يوضح كمرة مفصلية مركبة ، ومرتكزة فى بعض أجزائها على ركائز بندولية والمطلوب ايجاد أشكال مؤثرات الأجهاد الداخلى لهذه الكمرة .

الحل

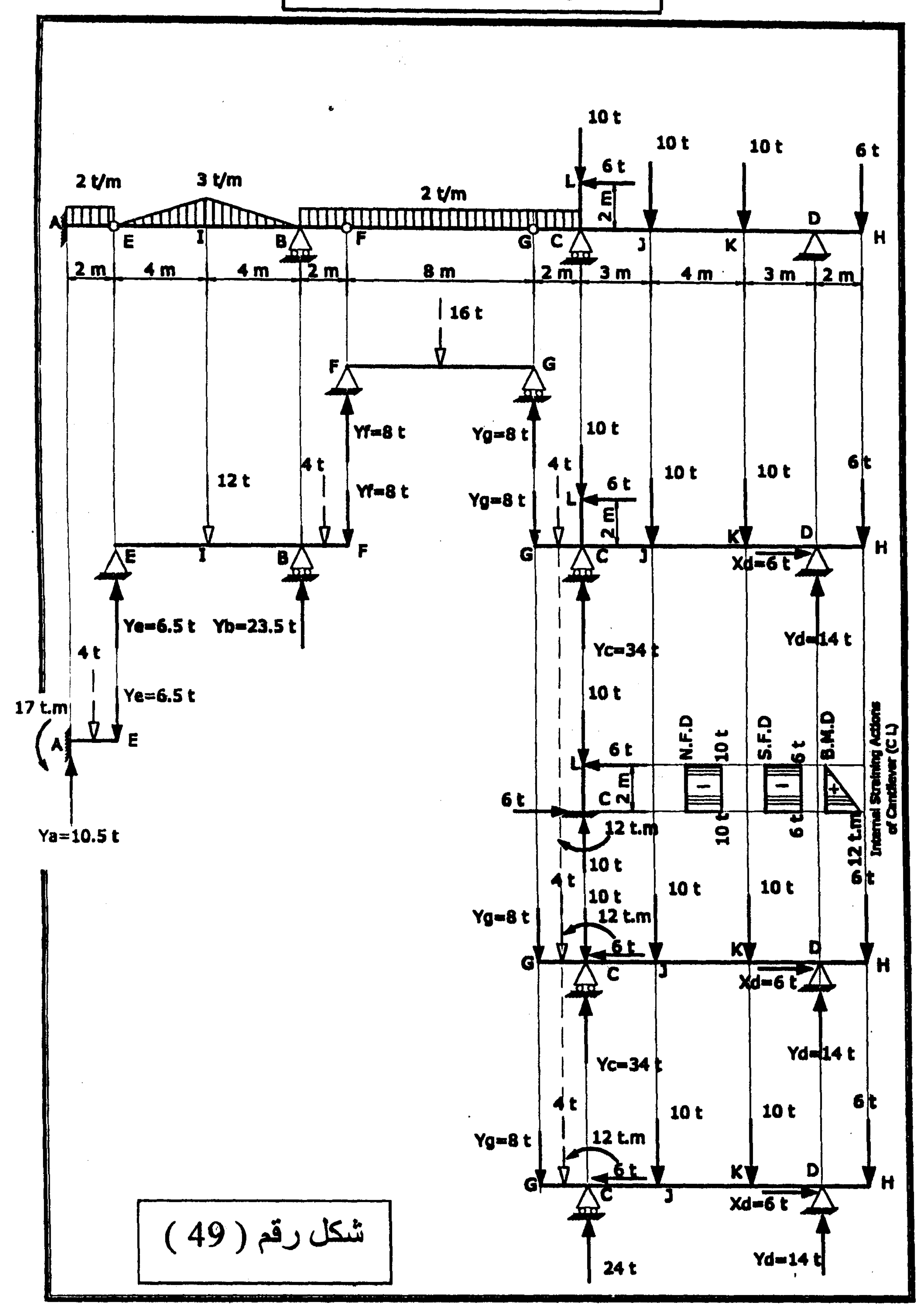
يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها ، وبعد ذلك يتم تقسيم الكمرة الى أجزائها الانشائية وبعدها نوجد ردود الأفعال الخارجية للركائز العادية والبندولية وبعد ذلك يتم فصل الركائز البندولية ووضع رد فعلها عند أماكن ارتكازها ، ثم تحليل ردود فعل الركائز البندولية – اذا كانت مائلة – الى مركبتين احداهما أفقية والأخرى راسية ، ثم يتم بعد ذلك رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بالطرق المعتادة ، أنظر شكل رقم (٤٨) .

مثال ١٧

الشكل رقم (٤٩) يوضح كمرة مفصلية مركبة ، وتحتوى على كابولى راسى (CL) ، والمطلوب ايجاد أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه الكمرة .

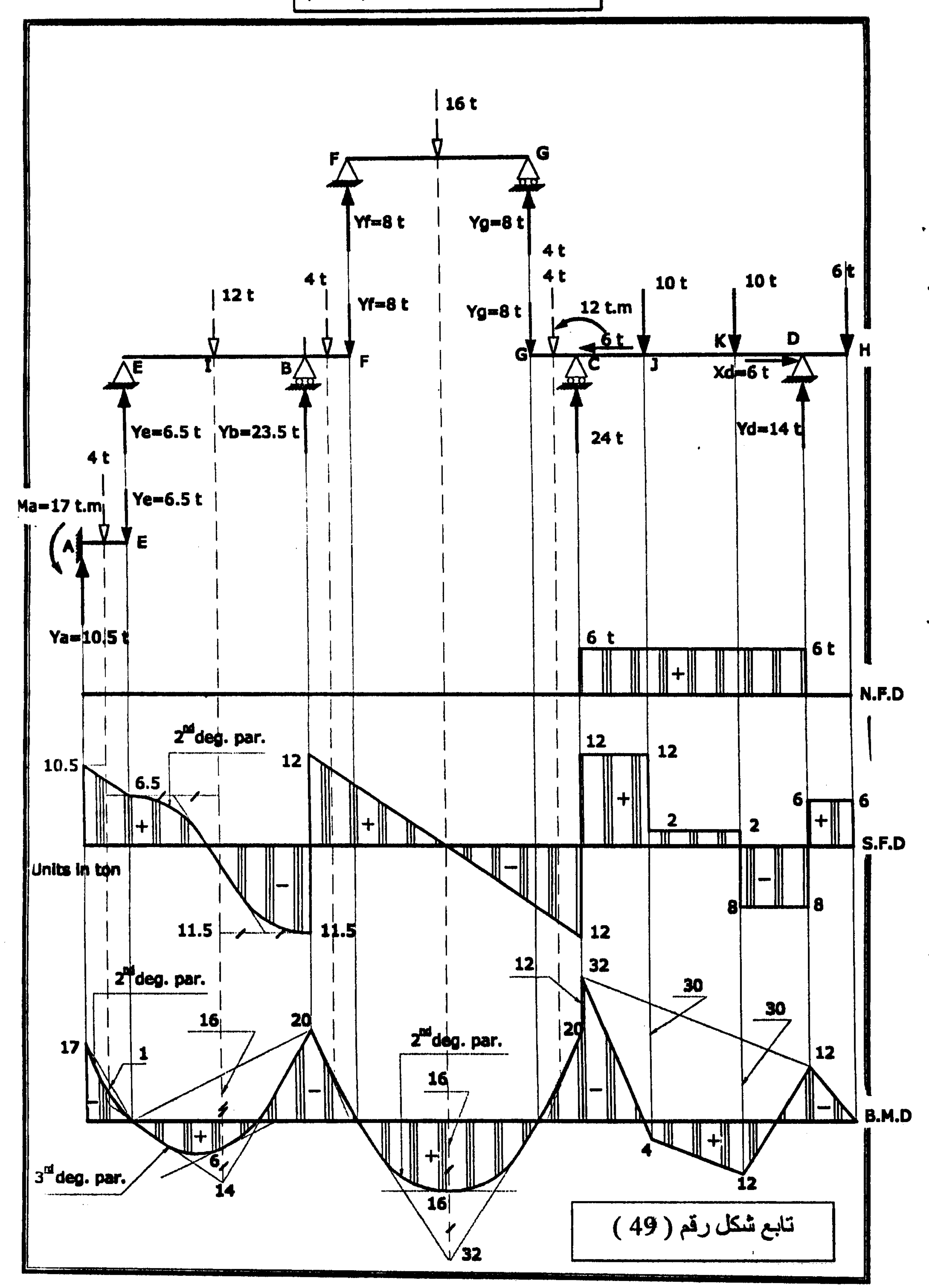
الحل

يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها ، وبعد ذلك يتم تقسيم الكمرة الى أجزائها الانشائية وبعدها نوجد ردود الأفعال الخارجية ، ويتم فصل الكابولى الراسى (CL) وعمل اتزان له ورسم شكل القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء ، وبعد ذلك يتم عكس ردود فعل هذا الكابولى على الكمرة الأصلية ، ثم يتم بعد ذلك رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى بالطرق المعتادة ، أنظر شكل رقم (٤٩) .



10 t
10 t
10 t
6 t
6 t
2 t/m
3 t/m
2 t/m
2 m
A E I B F G C J K D H
L
2 m 4 m 4 m 2 m 8 m 2 m 3 m 4 m 3 m 2 m
16 t
Yf=8 t
Yg=8 t
12 t
4 t
Ye=6.5 t
Yb=23.5 t
Xd=6 t
Yc=34 t
Yd=14 t
17 t.m
Ya=10.5 t
N.F.D
S.F.D
B.M.D
12 t.m
Internal Straining Actions of Cantilever (C L)
24 t

شكل رقم (49)



تابع شكل رقم (49)

مثال ١٨

للمنشأ الموضح بالشكل (٥٠) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى.

الحل

يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة لها وتؤثر فى مركز ثقلها ، وبعد ذلك يتم تقسيم المنشأ الى الأجزاء الانشائية الآتية وذلك لكى نوجد ردود الأفعال الخارجية ، ومن ثم يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

أولا : الجزء (ABC)
يتم دراسة اتزان هذا الجزء باستخدام معادلات الاتزان المعروفة ، وبالتالى يمكن ايجاد ردود الفعل عند الركيزة (A) ورد فعل البندول (BC) ، كما يلى :-

$\Sigma M @ B = 0.0$ i.e. $16 * 4 - Ya * 8 = 0.0$, or $Ya = 8$ t .
$\Sigma M @ A = 0.0$ i.e. $16 * 4 - Rbc * (4/5) * 8 = 0.0$, or $Rbc = 10$ t .
$Yb = Yc = Rbc * (4/5) = 10 * (4/5) = 8$ t
$Xb = Xc = Rbc * (3/5) = 10 * (3/5) = 6$ t
$\Sigma X = 0.0$ i.e. $Xa = 6$ t
Check , $\Sigma Y = (8 + 8) - (16) = 16 - 16 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

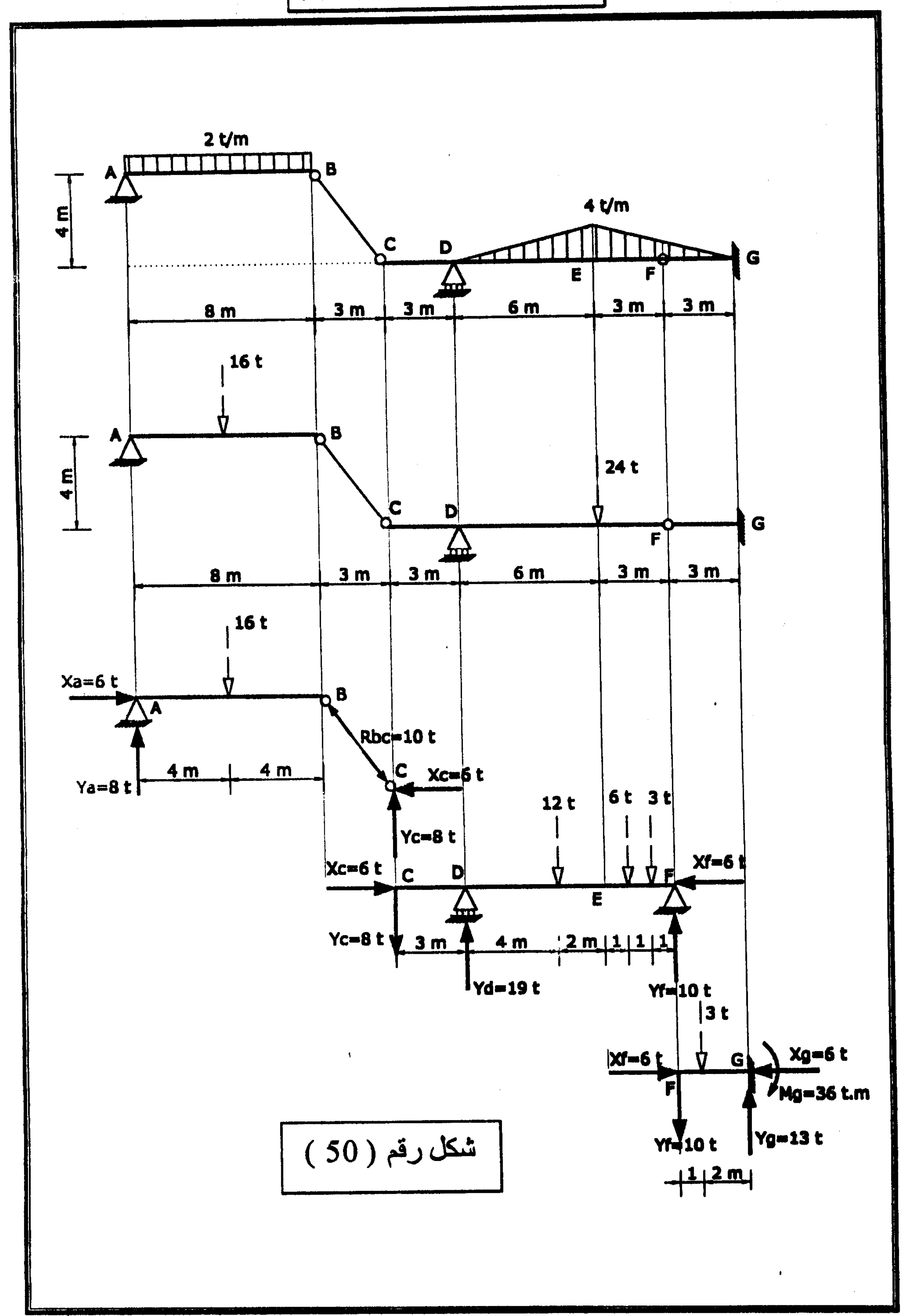
ثانيا : الجزء (CDEF)
فى هذا الجزء يتم اعتبار تأثير رد فعل البندول (BC) على هذا الجزء ، ثم بعد ذلك يتم دراسة اتزان هذا الجزء باستخدام معادلات الاتزان المعروفة ، وبالتالى يمكن ايجاد ردود الفعل عند الركيزة (D) ورد فعل المفصل (F) ، كما يلى :-

$\Sigma M @ F = 0.0$ i.e. $3 * 1 + 6 * 2 + 12 * 5 + 8 * 12 - Yd * 9 = 0.0$, or $Yd = 19$ t.
$\Sigma M @ D = 0.0$ i.e. $12 * 4 - 8 * 3 + 6 * 7 + 3 * 8 - Yf * 9 = 0.0$, or $Yf = 10$ t
$\Sigma X = 0.0$ i.e. $Xf = 6$ t
Check , $\Sigma Y = (19 + 10) - (8 + 12 + 6 + 3) = 29 - 29 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثالثا: الجزء (FG)
فى هذا الجزء يتم اعتبار تأثير رد فعل المفصل (F) على هذا الجزء ، ثم بعد ذلك يتم دراسة اتزان هذا الجزء باستخدام معادلات الاتزان المعروفة ، وبالتالى يمكن ايجاد ردود الفعل عند الركيزة المثبتة (G) ، كما يلى :-

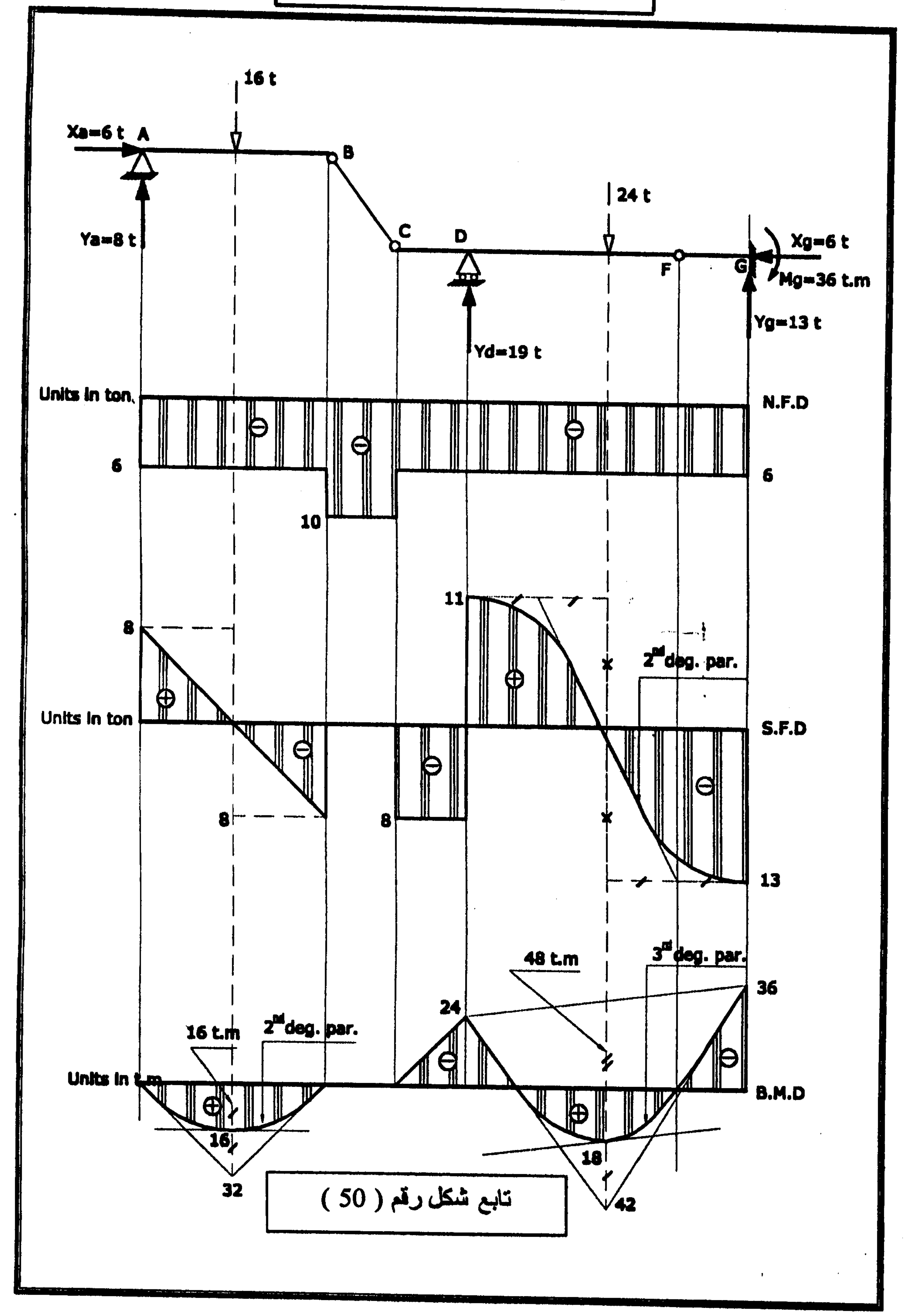
$\Sigma M @ G = 0.0$ i.e. $3 * 2 + 10 * 3 - Mg = 0.0$, or $Mg = 36$ t.m
$\Sigma Y = 0.0$ i.e. $Yg - 10 - 3 = 0.0$, or $Yg = 13$ t
$\Sigma X = 0.0$ i.e. $Xg = 6$ t
Check , $\Sigma M @ F = 3 * 1 + 36 - 13 * 3 = 39 - 39 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

يمكن تتبع خطوات ايجاد ردود الفعال ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى ، وذلك بالرجوع الى شكل رقم (٥٠) .



2 t/m
A
B
4 m
4 t/m
C
D
E
F
G
8 m
3 m
3 m
6 m
3 m
3 m
16 t
24 t
Xa=6 t
Ya=8 t
4 m
4 m
Rbc=10 t
Xc=6 t
Yc=8 t
12 t
6 t
3 t
Xf=6 t
Yd=19 t
Yf=10 t
2 m
Xg=6 t
Mg=36 t.m
Yg=13 t

شكل رقم (50)



تابع شكل رقم (50)

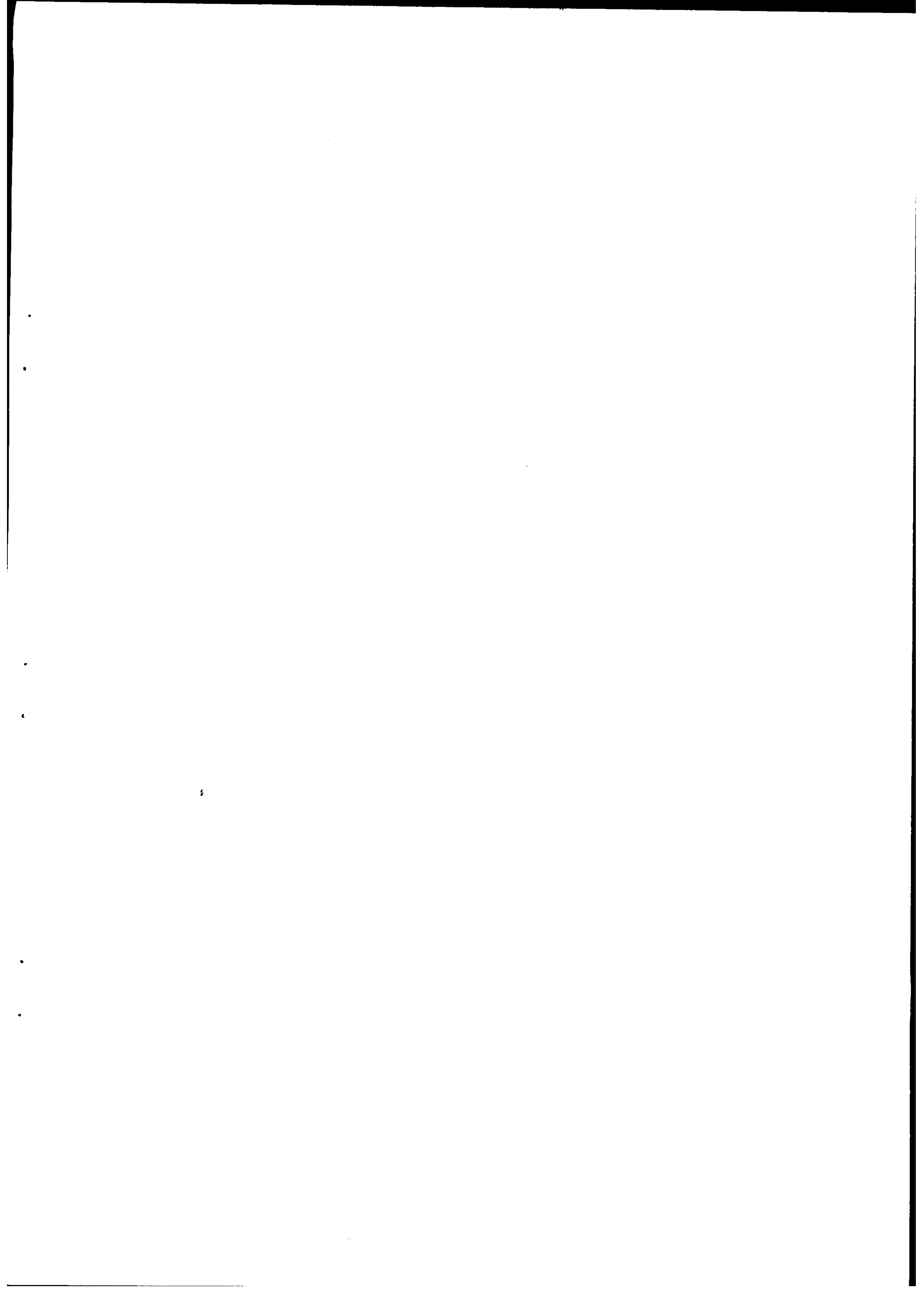


المحددة استاتيكيا

الفصل الثالث
مؤثرات الاجهاد الداخلى للمنشآت ذات المحور المائل

تأليف

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى



مؤثرات الاجهاد الداخلى للمنشآت ذات المحاور المائلة

مقدمة

المنشآت ذات المحاور المائلةهى تلك المنشآت ذات المحاور التى تميل بزاوية معينة على الأفقى مثل الكابولى المائل والكمرات المائلة بجميع أنواعها ويندرج أيضا تحت هذا المسمى الكمرات أو الكوابيل التى بها أجزاء مائلة وأجزاء أفقية فى نفس الوقت . ولايجاد مؤثرات الاجهاد الداخلى لهذه المنشآت يتم تحليل جميع القوى المركزة أو القوى المستبدلة أو ردود الأفعال الخارجية الى مركبتين احداهما موازية لمحور المنشأ و الأخرى عمودية عليه ، حيث تمثل ملاكبات القوى الموازية لمحور المنشأ القوى العمودية (Normal Force) وكما تمثل مركبات القوى العمودية على محور المنشأ قوى القص (Shearing Force) ، أما بالنسبة لعزوم الانحناء فانه يتم رسمه اما من القوى الأصلية قبل تحليلها وذلك بضرب القوى الرأسية والأفقية فى المسافات الأفقية والرأسية على الترتيب أو يتم رسم عزوم الانحناء من مركبات القوى فى الاتجاه العمودى على محور المنشأ ، وذلك بضرب هذه المركبات فى الأبعاد الموازية لمحور المنشأ ، وان كان الأفضل حساب ورسم عزوم الانحناء من القوى الأصلية . ويتم رسم أشكال مؤثرات القوى الداخلية على خط قاعدة موازى لمحور المنشأ وتكون احداثيات هذه الأشكال عمودية على خط القاعدة ، مع الأخذ فى الاعتبار نفس اصطلاحات الاشارات السابق ذكرها فى المنشآت ذات المحور الأفقى .

أمثلة توضيحية

مثال ١

للكابولى المائل الموضح بالشكل رقم (١) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

١. يتم ايجاد ردود الأفعال عند الركيزة المثبتة (B) وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة على النحو التالى :

$\Sigma X = 0.0 \;,\; \therefore Xb = 6\ t$

$\Sigma Y = 0.0 \;,\; \therefore Yb = 12\ t$

$\Sigma M\ @\ B = 0.0 \;,\; \therefore Mb = 12\ t.m$

٢. يتم تحليل القوى الأفقية والقوى الرأسية الى مركبتين احداهما موازية لمحور المنشأ والأخرى عمودية عليه على النحو التالى : -

عند الطرف (A)

- أولا المركبة الموازية لمحور المنشأ .

$Fx \cdot \cos\theta = 6 * 0.8 = 4.8\ t$

- ثانيا المركبة العمودية على محور المنشأ .

$Fx \cdot \sin\theta = 6 * 0.6 = 3.6\ t$

عند النقطة (C)

- أولا المركبة الموازية لمحور المنشأ .

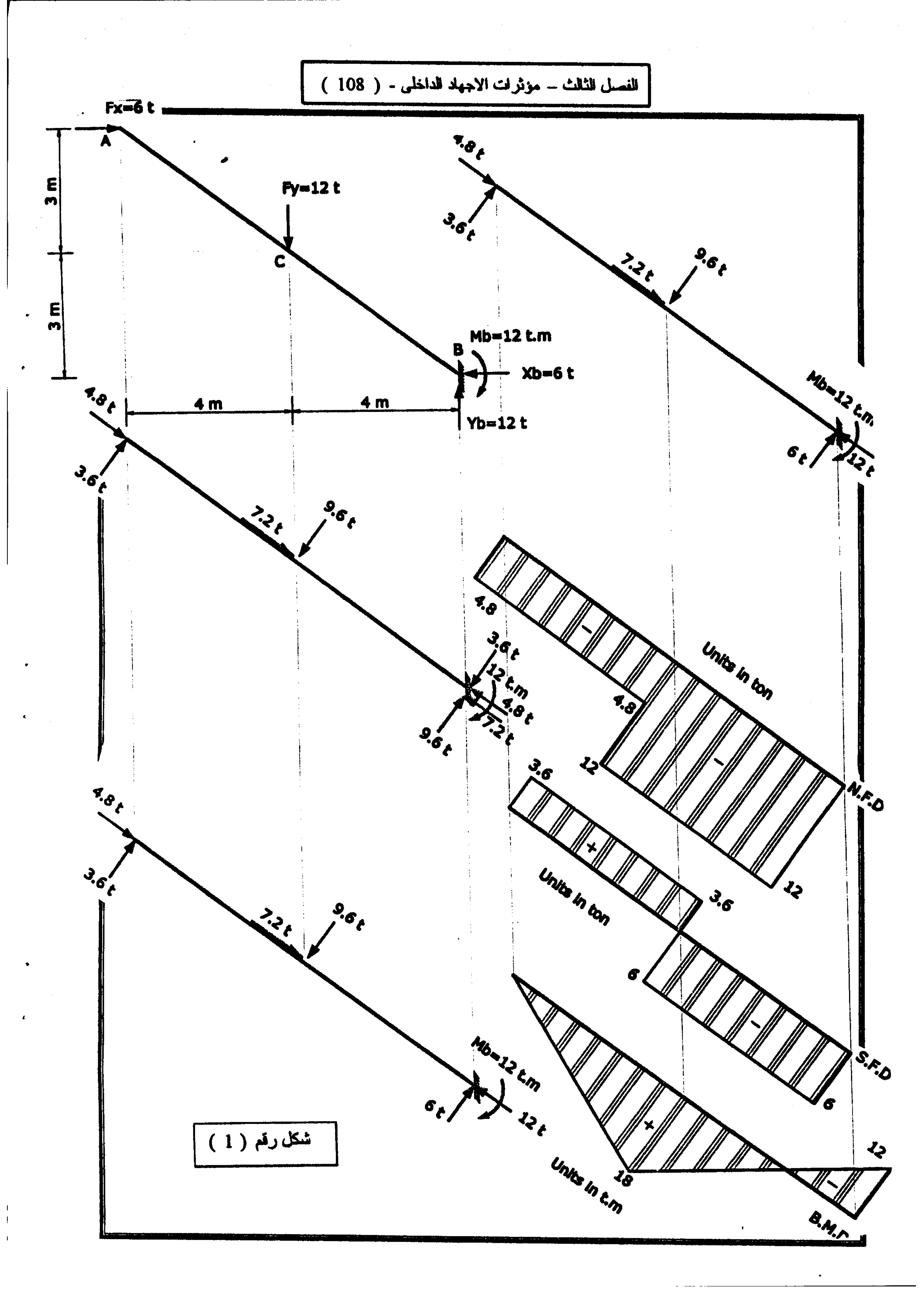
$Fy \cdot \sin\theta = 12 * 0.6 = 7.2\ t$

- ثانيا المركبة العمودية على محور المنشأ .

$Fy \cdot \cos\theta = 12 * 0.8 = 9.6\ t$

عند الطرف المثبت (B)

- أولا مجموع المركبات الموازية لمحور المنشأ .


Fx=6 t
A
3 m
3 m
Fy=12 t
C
B
Mb=12 t.m
Xb=6 t
Yb=12 t
4 m
4 m
4.8 t
3.6 t
7.2 t
9.6 t
Mb=12 t.m
6 t
12 t
12 t.m
Units in ton
N.F.D
S.F.D
B.M.D
Units in t.m
4.8
12
3.6
6
18

شكل رقم (1)

$\Sigma M @ A = 0.0$, or $10 * 2.5 + 12 * 4 + 6 * 4.5 - Yb * 8 - 12 * 6 = 0.0$

$\therefore Yb = 3.5$ ton .

٤. التحقق الحسابى من مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الراسى .

Check

$\Sigma Y = (16.5 + 3.5) - (8 + 12) = 20 - 20 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثانيا : تحليل كل قوة من القوى المؤثرة على الكمرة المائلة الى مركبتين احداهما موازية لمحور الكمرة و الأخرى عمودية على محور الكمرة ، وذلك على النحو التالى : -

- عند الركيزة (A) .

المركبة الموازية

$16.5 * 0.6 = 9.9$ ton .

المركبة العمودية

$16.5 * 0.8 = 13.2$ ton .

- عند نقطة (C) ، هناك مركبة واحدة عمودية على محور الكمرة وهى (10 ton) .
- عند نقطة (D) .

المركبة الموازية

$12 * 0.6 = 7.2$ ton .

المركبة العمودية

$12 * 0.8 = 9.6$ ton .

- عند نقطة (E) .

المركبة الموازية

$6 * 0.8 = 4.8$ ton .

المركبة العمودية

$6 * 0.6 = 3.6$ ton .

- عند الركيزة (B) .

مجموع المركبات الموازية

$12 * 0.8 - 3.5 * 0.6 = 7.5$ ton .

مجموع المركبات العمودية

$12 * 0.6 + 3.5 * 0.8 = 10$ ton .

- التحقق الحسابى من تحليل القوى فى الاتجاه الموازى والعمودى على محور الكمرة .
- Check

$\Sigma X' = (7.2 + 7.5) - (9.9 + 4.8) = 14.7 - 14.7 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

$\Sigma Y' = (13.2 + 10) - (10 + 9.6 + 3.6) = 23.2 - 23.2 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثالثا : يتم رسم شكلى القوى العمودية - من المركبات الموازية لمحور الكمرة - وقوى القص – من المركبات العمودية على محور الكمرة .

رابعا : حساب ورسم شكل عزوم الانحناء ، أنظر شكل رقم (٢) .

$Ma = 0.0$

$Mc = 13.2 * 2.5 = 33$ t.m.

$Md = 13.2 * 5 - 10 * 2.5 = 41$ t.m.

$Me = 10 * 2.5 = 25$ t.m.

$Mb = 0.0$

مثال ٣

للكابولى المائل الموضح بالشكل رقم (٣) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

باعتبار القطاع (s-s) على بعد (x) من الطرف الحر (A) ، ويتم استبدال الحمل الموزع فى هذا الجزء بحمل مركز مكافئ (p.x) ، ويتم تحليل هذا الحمل المكافئ الى مركبتين احداهما موازية لمحور الكابولى (p.x sin θ) والأخرى عمودية عليه (p.x cos θ) ، وعليه تكون القوة العمودية عند القطاع (s-s) هى (- p.x sin θ) ، وقوة القص هى (- p.x cos θ) ، وعزم الانحناء عند نفس القطاع يساوى ($- p.x^2 /2$) ، ومن الملاحظ أن دالة القوى العمودية وقوى القص عبارة عن دالة خطية أى من الدرجة الأولى ، كما نلاحظ أن دالة عزوم الانحناء عبارة عن دالة من الدرجة الثانية ، ولكى يتم رسم دالة القوى العمودية وقوى القص فسوف يتم ايجاد نقطتين على هذه الدالة ويتم التوصيل بينهما بخط مستقيم ، وعادة يتم اختيار النقطة الأولى عند (x = 0.0) أى عند نقطة (A) والنقطة الأخرى عند (x = L) أى عند الطرف المثبت (B) وذلك على النحو التالى : -

$$Na = 0.0 \quad , \quad Qa = 0.0$$
$$Nb = - p.L \sin\theta \quad , \quad Qb = - p.L \cos\theta$$

ولرسم شكل عزوم الانحناء – وهو عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية - يتم ايجاد عزوم الانحناء عند نقطتى البداية والنهاية – أى عند (x = 0.0 , x = L) على الترتيب - وكذلك ايجاد المماسات عندهما وذلك على النحو التالى : -

$$Ma = 0.0 \quad , \quad Mb = - p.L^2 /2$$

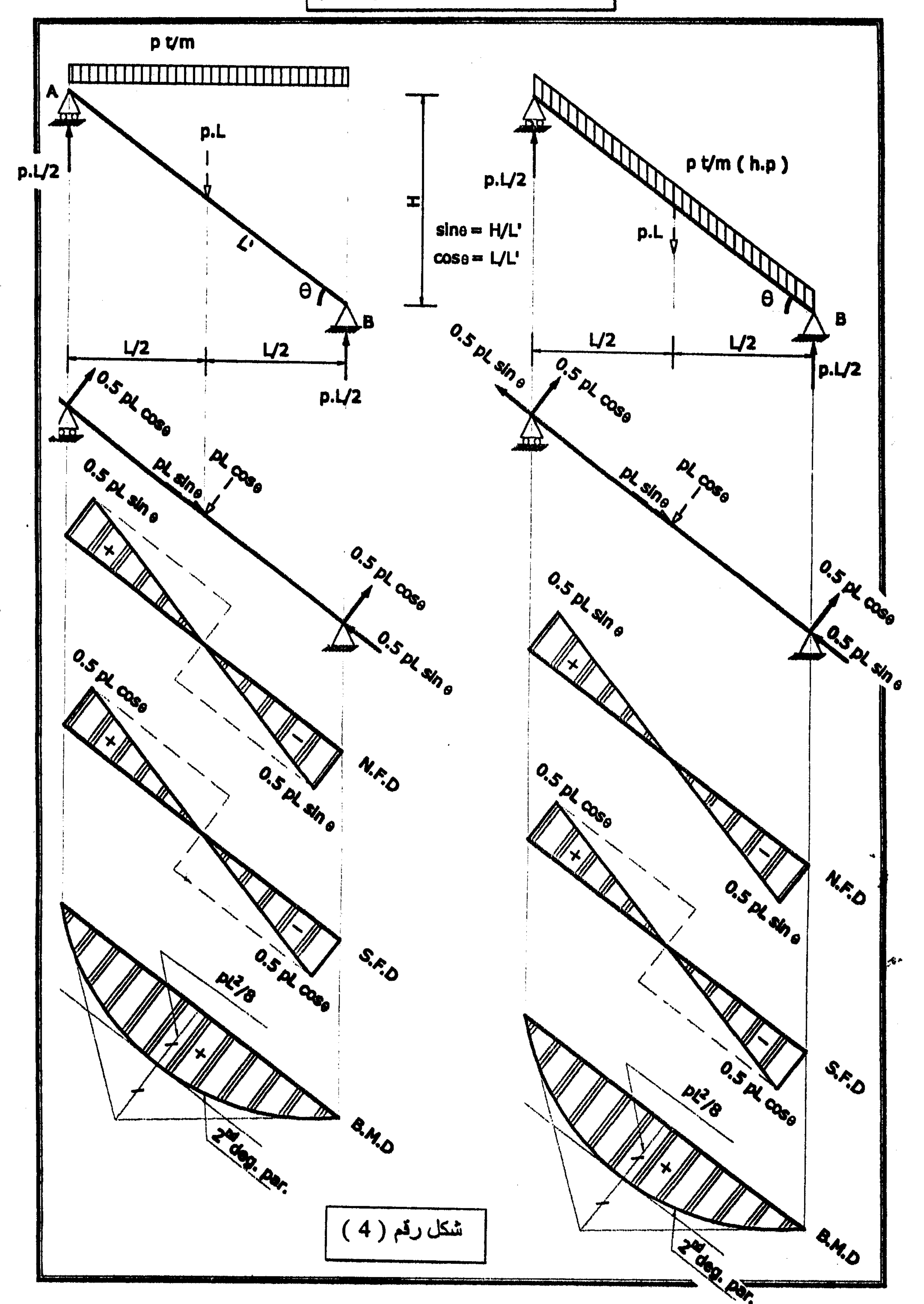
وحيث أن ميل المماس لعزوم الانحناء عند القطاع (s-s) هو (dM / dz) ، حيث (z) هو البعد الحقيقى على الكابولى المائل المناظر للبعد (x) ، أى أن (z = x / cos θ) ، وبالتالى يكون (dz = dx / cos θ) وعليه يكون ميل المماس لعزم الانحناء هو كما يلى : -

$$dM / dz = dM \cos\theta / dx = d (- p.x^2 /2) \cos\theta / dx = - p.x \cos\theta$$

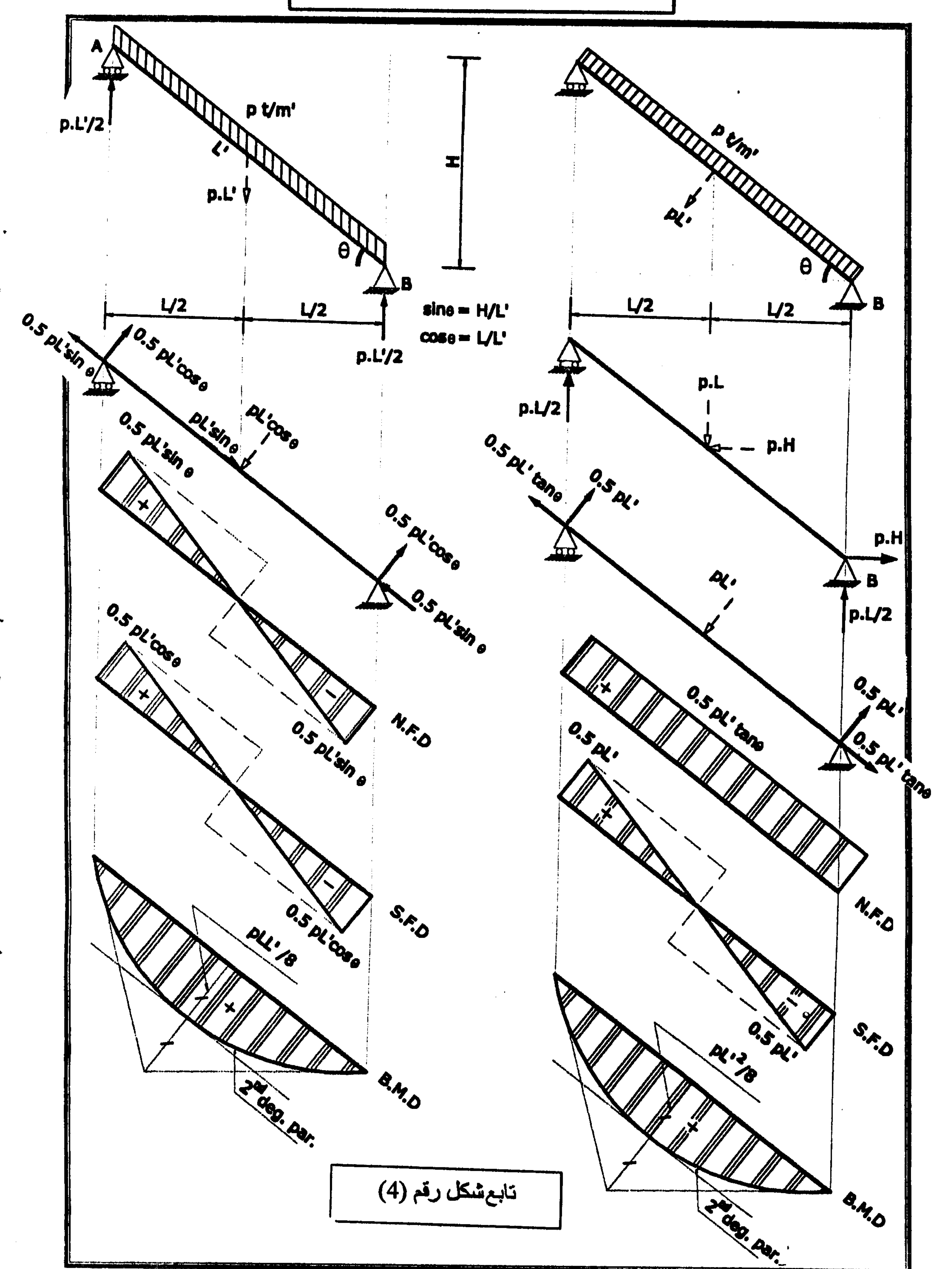
اى أن ميل المماس لمنحنى العزوم عند قطاع ما يساوى قيمة القص عند نفس القطاع ، وعليه يكون ميل المماس عند الطرف الحر (A) يساوى صفر ، وهذا يعنى أن المماس عند نقطة (A) يكون منطبقا على خط القاعدة ، كما أن ميل المماس عند الطرف المثبت (B) هو (- p.L cos θ) ، وحيث أن العزم عند (B) هو ($- p.L^2 /2$) ، واذا فرض أن المماس لمنحنى العزوم عند (B) يقطع خط القاعدة فى نقطة (n) على بعد (z1) من (B) فان ميل المماس هو (($- p.L^2 / (2\, z1)$) وهو فى نفس الوقت يساوى (- p.L cos θ) ، أى أن : -

$$- p.L \cos\theta = - p.L^2 / (2\, z1) \quad , \text{or} \quad z1 = 0.5\, L / \cos\theta$$

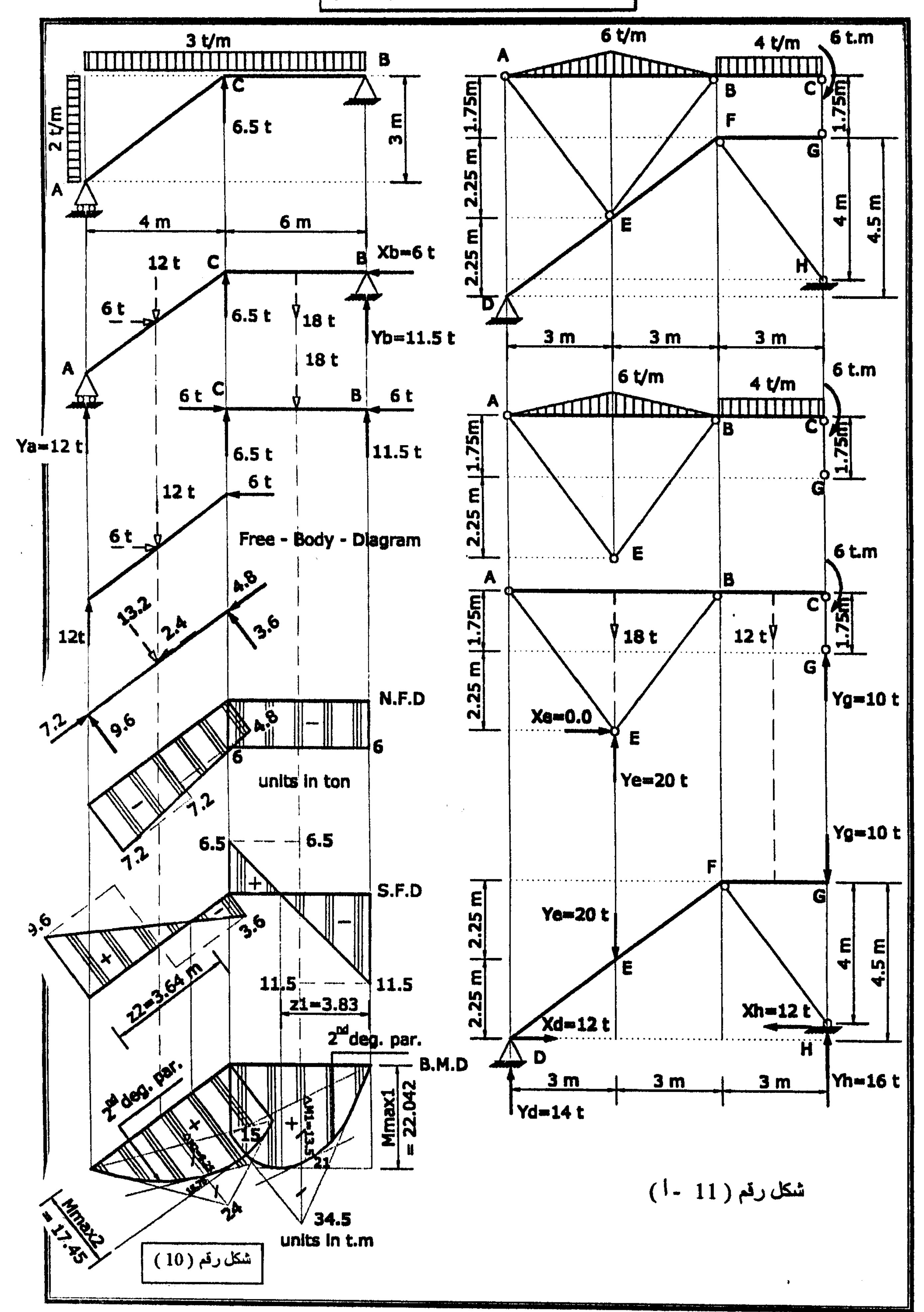
اى أن المماس يقطع خط القاعدة عند منتصفها ، أنظر شكل رقم (٣) . الشكل رقم (٣) يوضح أيضا طريقة الاستبدال والتصحيح . ومن الملاحظ أن هذه الطريقة أعطت نفس النتائج السابق حسابها عن طريق القطاعات مما يعنى صلاحيتها للاستخدام فى رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى للمنشآت ذات المحاور المائلة مع مراعاة نفس القواعد السابق ذكرها فى المنشآت ذات المحور الأفقى .


p t/m
A
p.L
p.L/2
L'
θ
B
L/2
L/2
p.L/2
H
sinθ = H/L'
cosθ = L/L'
p t/m (h.p)
p.L/2
p.L
θ
B
L/2
L/2
p.L/2
0.5 pL cosθ
0.5 pL sin θ
pL sinθ
pL cosθ
0.5 pL cosθ
0.5 pL sin θ
0.5 pL sin θ
N.F.D
0.5 pL cosθ
0.5 pL cosθ
S.F.D
pL²/8
2nd deg. par.
B.M.D

شكل رقم (4)



تابع شكل رقم (4)



شكل رقم (10)

شكل رقم (11 - أ)

أولا : نوجد ردود الأفعال بالطريقة المعتادة ، وذلك بعد استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة وتؤثر فى مراكز ثقل هذه الأحمال .

ثانيا : نلاحظ أن هذا المنشأ مكون من جزءين ، الجزء الأول (AC) محوره مائل ، والجزء الثانى (CB) محوره أفقى ؛ لذلك سوف يتم فصل الجزءين عند نقطة (C) واعتبار كل جزء على أنه جسم حر الحركة (Free - Body- Diagram) ، ودراسة اتزانه وبعد ذلك تحليل القوى الموجودة على الجزء المائل (AC) الى مركبتين احداهما موازية لمحور هذا الجزء و الأخرى عمودية عليه ، أنظر شكل رقم (١٠) .

ثالثا : يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لكل جزء على حدة على خط قاعدة يناظر كل جزء وذلك بالطريقة المعتادة ، أنظر شكل رقم (١٠) .

مثال ٩ - أ

للمنشأ المركب الموضح بالشكل رقم (١١ - أ) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

نلاحظ أن هذا المنشأ عبارة عن جزءين ، الجزء الأول (ABC) مرتكز على ركائز بندولية وهى (AE , BE , CG) وهذه الركائز البندولية مرتكزة بدورها على الجزء الثانى وهو (DEFG) والذى يرتكز بدوره على ركيزة مفصلية مثبتة عند (D) وركيزة بندولية (HF) عند نقطة (F) . ولرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لمثل هذه المنشآت ، يجب أن نبدأ أولا بحل الجزء الأول (ABC) وهو محمول على الجزء الثانى ، ثم بعد ذلك يتم عكس اتجاه ردود أفعال الركائز البندولية (AE , BE , CG) على الجزء الثانى (DEFG) كأحمال مركزة ومن ثم يتم حل هذا الجزء وذلك على النحو التالى : -

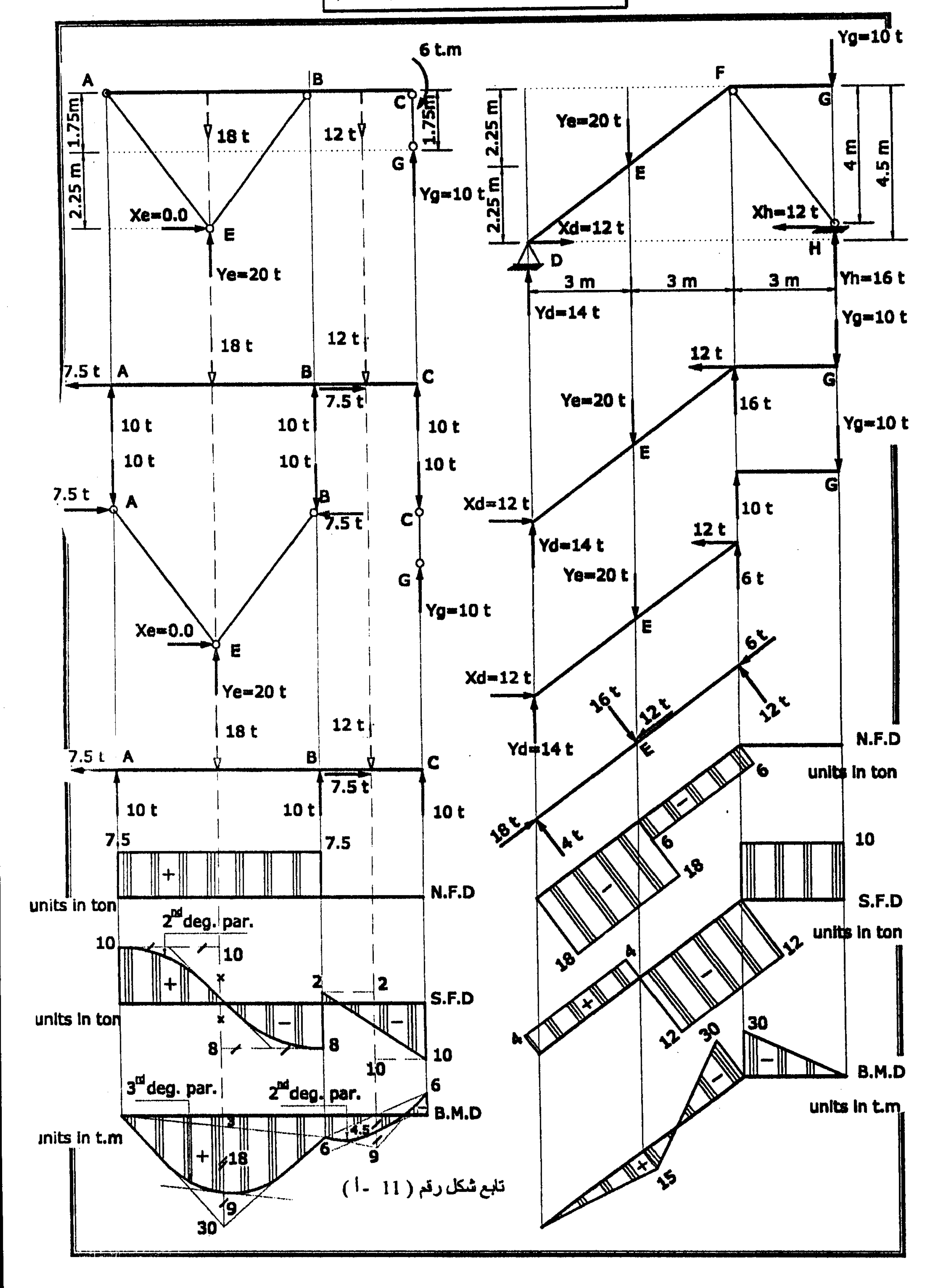
أولا : الجزء (ABC) .

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore$ Xe = 0.0
ΣM @ E = 0.0 , i.e. $12 * 4.5 - Yg * 6 = 0.0$, $\therefore$ Yg = 10 ton .
$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore$ Ye = 18 + 12 – 10 = 20 ton .

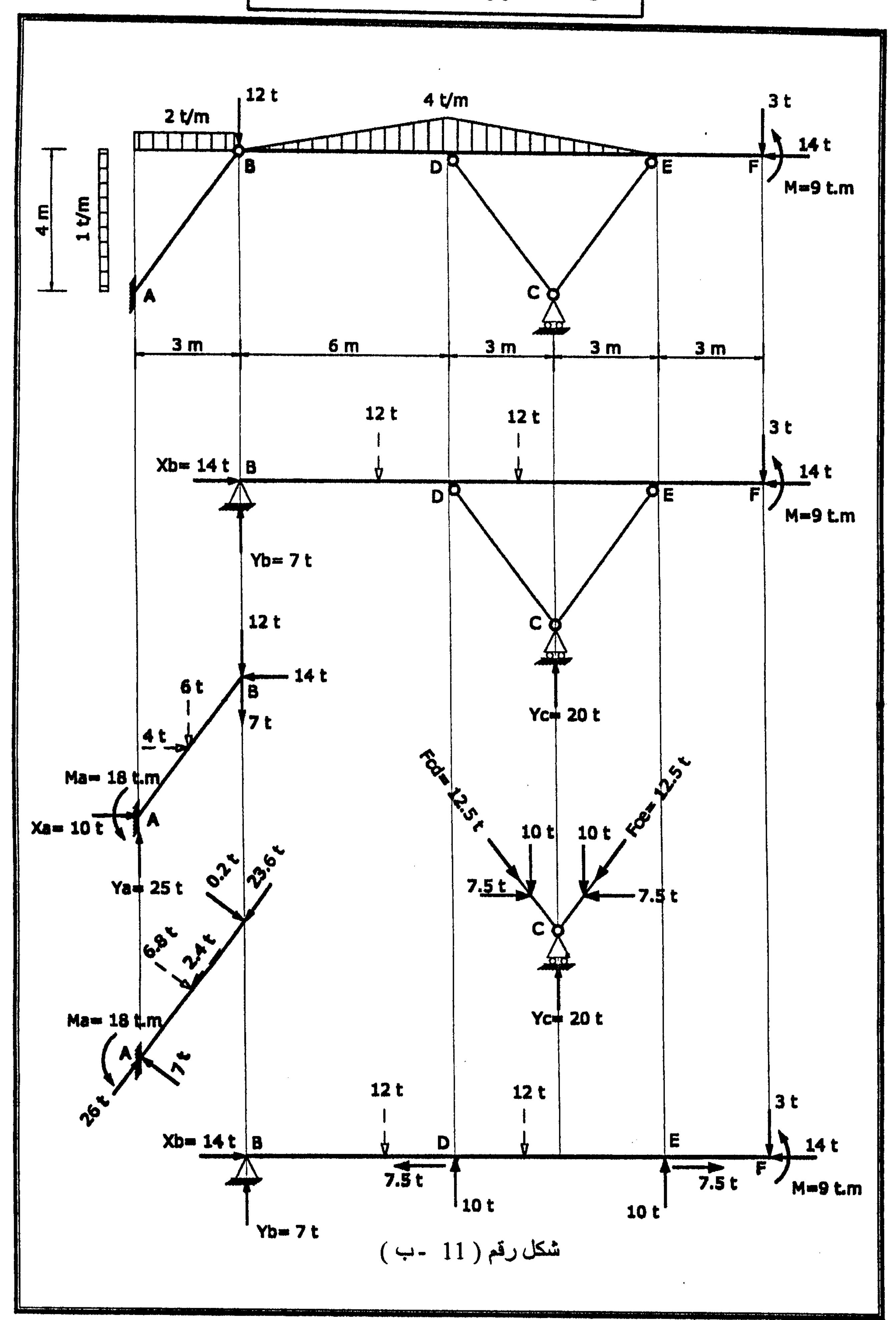
ثانيا : الجزء (DEFG) .

ΣM @ D = 0.0 , i.e. $20 * 3 + 10 * 9 - Yh * 9 - Xh * (0.5) = 0.0$
or , 150 – 9 Yh – 0.5 Xh = 0.0 , but (Yh / Xh) = 4 /3 , or Xh = 0.75 Yh
$\therefore$ 150 – 9 Yh – 0.5 * (0.75 Yh) = 0.0 , or Yh = 16 ton .
and Xh = 0.75 * Yh = 0.75 * 16 = 12 ton .
$\Sigma X = 0.0$, $\therefore$ Xd = 12 ton .
ΣM @ H = 0.0 , i.e. $20 * 6 + 12 * 0.5 - Yd * 9 = 0.0$, $\therefore$ Yd = 14 ton .
Check
ΣY = (14 +16) – (20 + 10) = 30 - 30 = 0.0 , $\therefore$ O.K.

بعد ايجاد ردود الأفعال لكلا الجزءين ، يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لكل منهما على حدة وذلك كما سبق ذكره فى الأمثلة السابقة ، ويمكن تتبع خطوات الحل بالاستعانة بالشكل رقم (١١ - أ) .

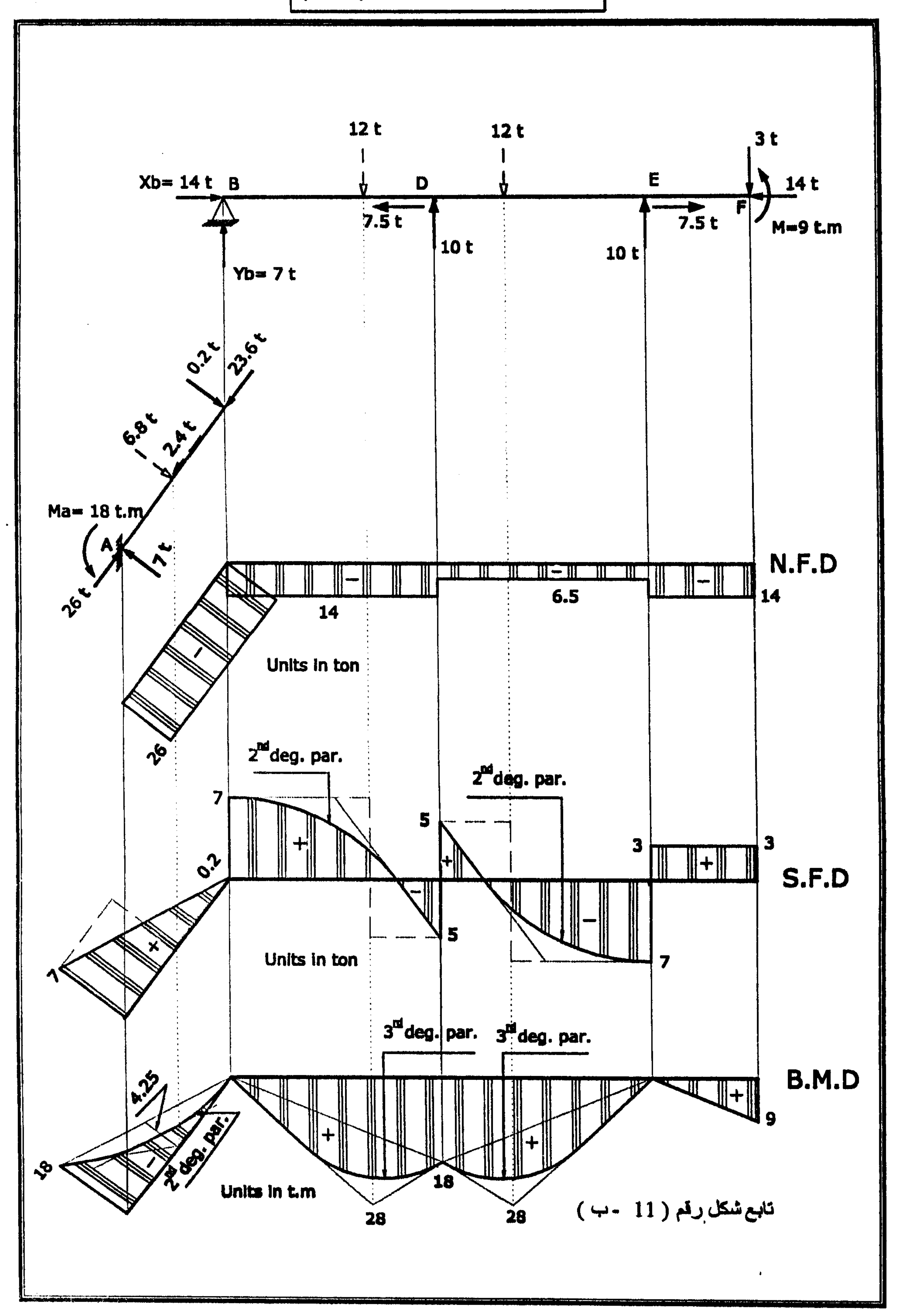


تابع شكل رقم (11 - أ)



12 t
2 t/m
4 t/m
3 t
14 t
M=9 t.m
4 m
1 t/m
A
B
D
E
F
C
3 m
6 m
3 m
3 m
3 m
12 t
12 t
Xb= 14 t
Yb= 7 t
Yc= 20 t
14 t
7 t
6 t
4 t
Ma= 18 t.m
Xa= 10 t
Ya= 25 t
0.2 t
23.6 t
6.8 t
2.4 t
26 t
Fcd= 12.5 t
Fce= 12.5 t
10 t
10 t
7.5 t
7.5 t

شكل رقم (11 - ب)



تابع شكل رقم (11 - ب)

مثال ٩ - ب

للمنشأ المركب الموضح بالشكل رقم (١١ - ب) ، المطلوب رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

نلاحظ أن هذا المنشأ عبارة عن جزءين ، الجزء الأول (BCDE) مرتكز على ركيزتين بندولين عند النقطتين (D , E), على الكابولى (AB) عند النقطة (B) ، وأما الجزء الثانى فهو الكابولى المائل (AB). ولرسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لمثل هذه المنشآت ، يجب أن نبدأ أولا بحل الجزء الأول (BCDE) ، وبأخذ العزوم حول نقطة (B) لهذا الجزء يمكن ايجاد رد الفعل الرأسى عند الركيزة المفصلية المتحركة (C) وهو (Yc = 20 t) ، وبتطبيق بقية شروط الاتزان يمكن ايجاد ردى الفعل عند الركيزة (B) وهما (Yb = 7 t , Xb = 14 t) .

أقصى عزم موجب وأقصى عزم سالب

مثال ١٠

للمنشأ الموضح بالشكل رقم (١٢) ، أوجد القوة (F) بحيث يكون أقصى عزم موجب يساوى أقصى عزم سالب .

الحل

من الشكل رقم (١٢) يتضح أن أقصى عزم سالب يحدث عند الركيزة المثبتة (A) ، وهو على النحو التالى : -

$$M_{max} (-ve) = 20 * 5 - 10 * F = 100 - 10 F \quad .... (1)$$

ويكون أقصى عزم موجب عندما يتلاشى القص ، فلو أخذنا قطاعا على بعد (x) من الطرف الحر (B) ، فان الحمل المكافئ فى هذا الجزء يساوى (2 x) ، وعندما يتلاشى القص فان : -

$$F = 2 x \text{ , or } x = F / 2 \text{ , but } M_{max} (+ve) = F * x - 2 x * x /2 \text{ , or}$$
$$M_{max} (+ve) = F * F /2 - F^2 / 4 = F^2 / 4 \quad .... (2)$$

وحيث أن أقصى عزم موجب يساوى أقصى عزم سالب اذا : -

$$100 - 10 F = F^2 /4 \text{ , or } F^2 + 40 F - 400 = 0.0$$

وبحل المعادلة السابقة ينتج أن : -

$$F = 8.28427 \text{ ton , and } x = F / 2 = 4.142135 \text{ m , and}$$
$$M_{max} (+ve) = M_{max} (-ve) = 17.1573 \text{ t.m.}$$

مثال ١١

للكمرة المفصلية المركبة الموضحة فى شكل (١٣) ، المطلوب ايجاد المسافة (x) – بعد المفصل الداخلى عن الركيزة المثبتة – بحيث يكون أقصى عزم موجب مساويا لأقصى عزم سالب .

الحل

يتم فصل الفتحة المعلقة (AC) عن الكابولى (CB) ، ودراسة اتزان كل جزء على حدة ، ومن الشكل رقم (١٣) يتضح أن أقصى عزم موجب يكون فى منتصف الفتحة المعلقة (AC) ، وأقصى عزم سالب يكون عند الركيزة المثبتة (B) وعليه يمكن تتبع الحل كما يلى : -

$M_{max}\,(+ve) = 2 * (10 - x)^2 / 8 = (10 - x)^2 /4$,
$M_{max}\,(-ve) = (10 - x) * x + 2x * x/2 = 10x - x^2 + x^2 = 10x$,
but $M_{max}\,(+ve) = M_{max}\,(-ve)$, $\therefore (10 - x)^2 /4 = 10x$, or
$x^2 - 60x + 100 = 0.0$, or $x = 1.71575$ m , and
$M_{max}\,(+ve) = M_{max}\,(-ve) = 17.1572$ t.m.

مثال ١٢

للكمرة ممتدة الأطراف الموضحة بالشكل رقم (١٤) ، المطلوب ايجاد المسافة (x) بحيث يكون أقصى عزم موجب مساويا لأقصى عزم سالب .

الحل

يمكن تتبع الحل بالاستعانة بالشكل رقم (١٤) – حيث أن أقصى عزم موجب يكون فى منتصف البحر (AB) وأقصى عزم سالب فوق الركيزتين (A , B) – وذلك على النحو التالى : -

$M_{max}\,(-ve) = p.x * x/2 = p\,.\,x^2 /2$,
$M_{max}\,(+ve) = p\,.\,(10 - 2x)^2 / 8 - p\,.\,x^2 / 2$,
but $M_{max}\,(+ve) = M_{max}\,(-ve)$, $\therefore p\,.\,x^2 / 2 = p\,.\,(10 - 2x)^2 / 8 - p\,.\,x^2 / 2$
or, $p\,.\,x^2 = p\,.\,(10 - 2x)^2 / 8$, or $8x^2 = (10 - 2x)^2$, or
$4x^2 + 40x - 100 = 0.0$, or $x = 2.071$ m , and
$M_{max}\,(+ve) = M_{max}\,(-ve) = 2.14452\,p$.

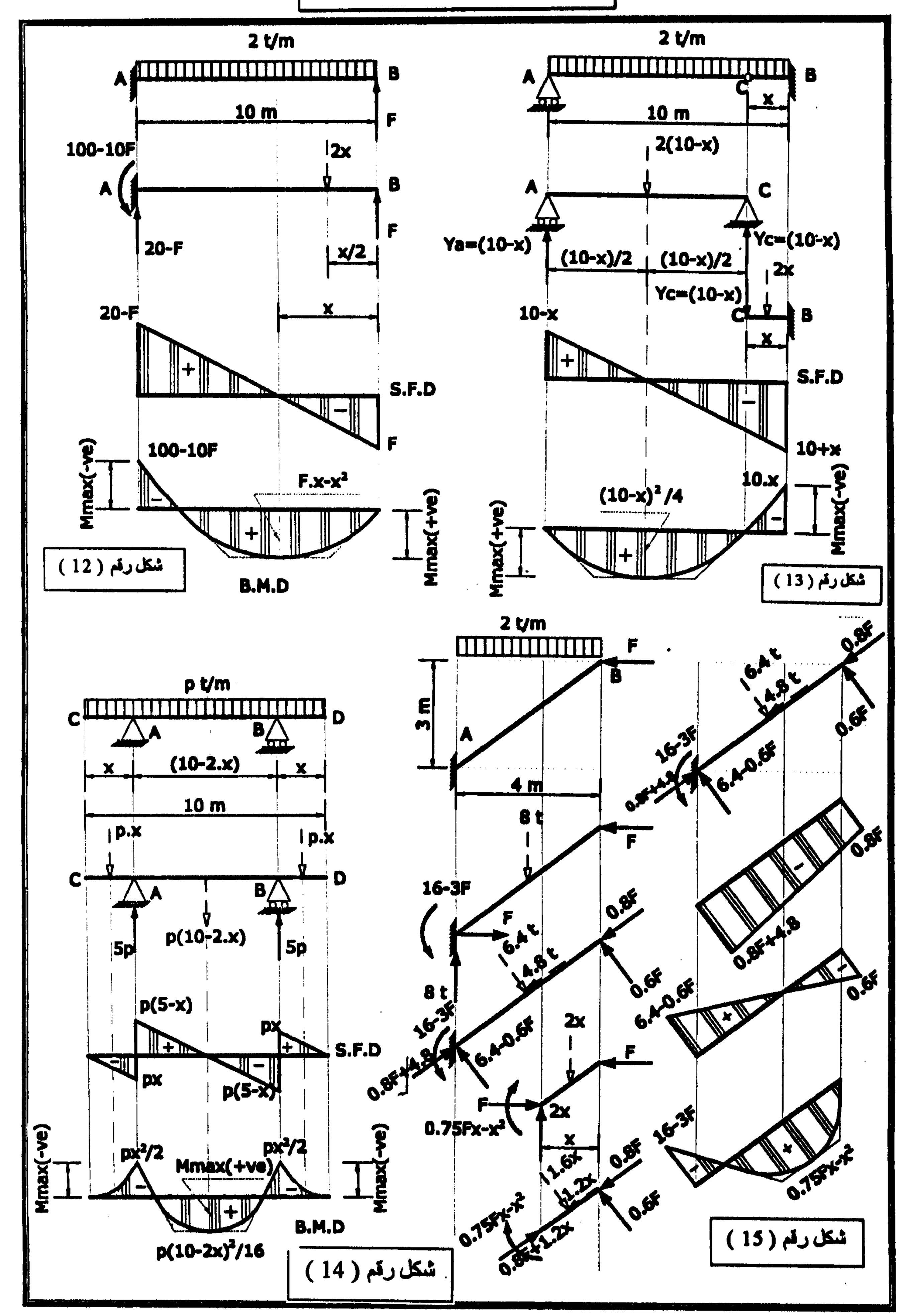
مثال ١٣

للكابولى المائل الموضح بالشكل رقم (١٥) ، المطلوب ايجاد القوة (F) بحيث يكون أقصى عزم موجب مساويا لأقصى عزم سالب .

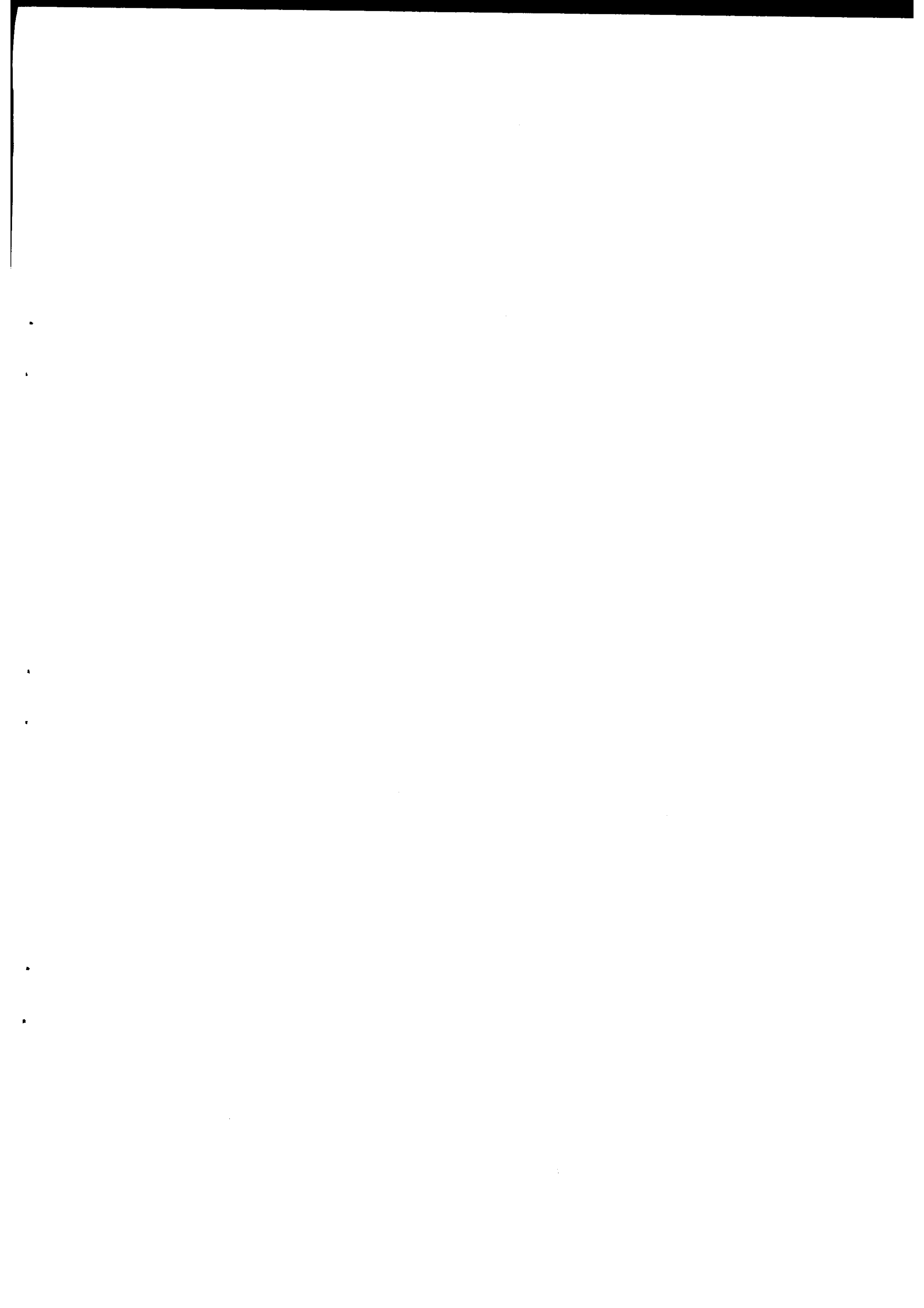
الحل

من الشكل رقم (١٥) يتضح أن أقصى عزم سالب يكون عند الطرف المثبت (A) ، وأقصى عزم موجب يكون على بعد (x) من الطرف الحر (B) حيث يتلاشى القص . ولايجاد قيمة القص عند قطاع ما فى المنشآت ذات المحور المائل ، يتم تحليل جميع القوى فى الاتجاه العمودى على محور المنشأ عند هذا القطاع ، ويكون القص عند هذا القطاع مساويا لمجموع المركبات العمودية حتى هذا القطاع ، وعليه يكون القص عند القطاع الذى يبعد المسافة الأفقية (x) من الطرف الحر هو كما يلى : -

$Qx = F \sin\theta - 2x\cos\theta$, but $\sin\theta = 0.6$, $\cos\theta = 0.8$, $\therefore Qx = 0.6F - 1.6x$
at zero shear, $0.6F - 1.6x = 0.0$, or $x = 0.375F$, but
Mmax (+ve) = $F \cdot (0.75x) - 2x * x/2$, or
Mmax (+ve) = $F \cdot (0.75 * 0.375F) - (0.375F)^2 = 0.140625F^2$, and
Mmax (-ve) = $8 * 2 - 3F = 16 - 3F$, for Mmax (+ve) = Mmax (-ve), i.e.
$0.140625F^2 = 16 - 3F$, or $F = 4.4183$ ton, and
Mmax (+ve) = Mmax (-ve) = 2.745 t.m.



2 t/m
A
B
10 m
F
100-10F
2x
20-F
x/2
x
S.F.D
100-10F
F.x-x²
Mmax(-ve)
Mmax(+ve)
B.M.D
شكل رقم (12)
C
Ya=(10-x)
Yc=(10-x)
(10-x)/2
2(10-x)
10-x
10+x
10.x
(10-x)²/4
شكل رقم (13)
p t/m
D
(10-2.x)
p.x
5p
p(10-2.x)
p(5-x)
px
px²/2
Mmax(+ve)
p(10-2x)²/16
شكل رقم (14)
3 m
4 m
8 t
16-3F
6.4 t
4.8 t
0.8F
0.6F
6.4-0.6F
0.8F+4.8
0.75Fx-x²
1.6x
1.2x
0.8F+1.2x
شكل رقم (15)



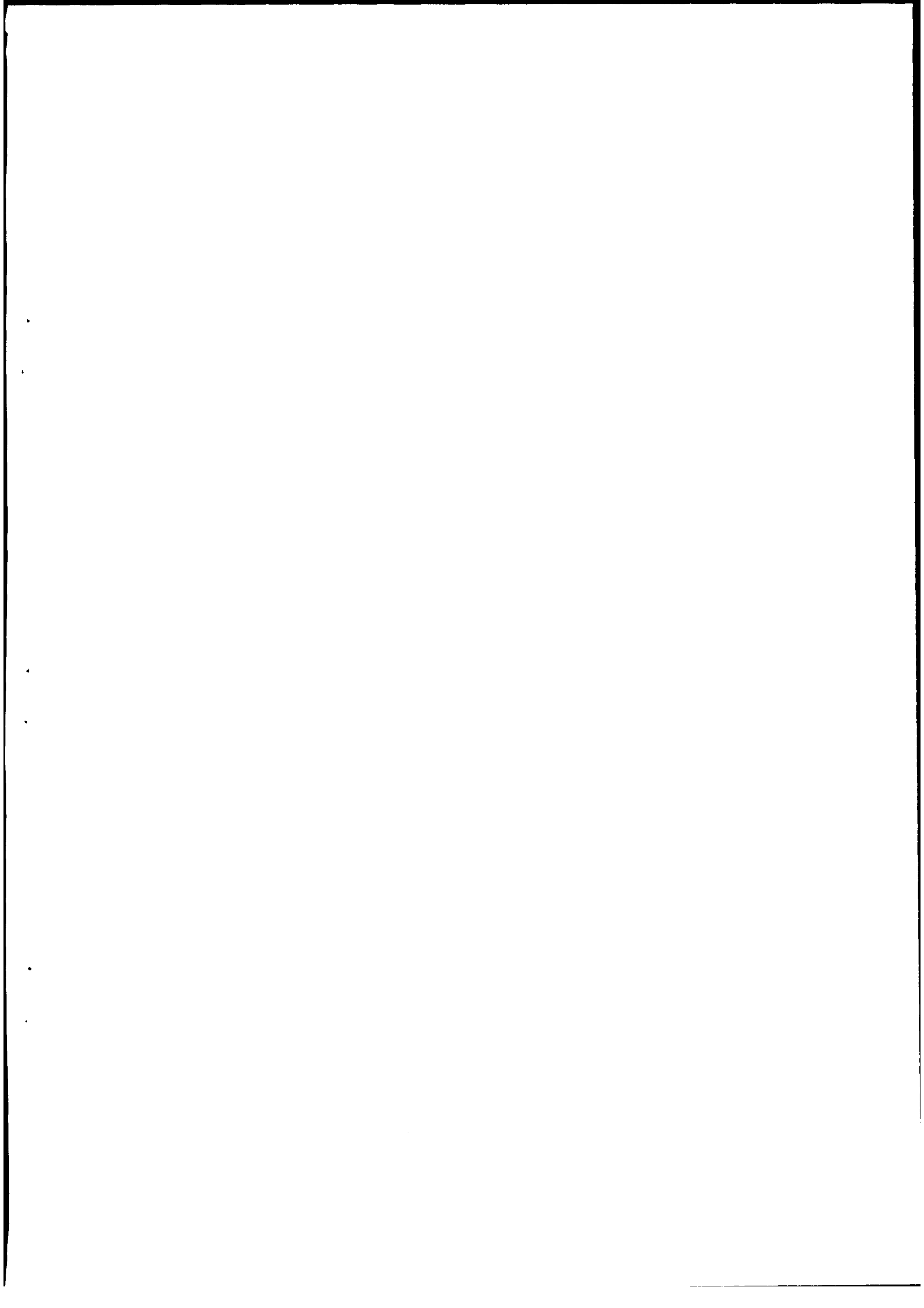


المحددة استاتيكيا

الفصل الرابع
مؤثرات الاجهاد الداخلى للاطارات

تأليف

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى



مؤثرات الاجهاد الداخلى للاطارات

مقدمة

تعرف الاطارات بأنها تلك المنشآت التى يكون محورها مضلعا (Polygonal) وهناك أنواع عديدة من الاطارات وهذه الأنواع تعتمد على شكل الارتكاز الخارجى وذلك كما سبق ذكره فى الفصل الأول ، ومن هذه الأنواع ؛ الاطارات البسيطة ، الاطارات ذات الثلاثة مفاصل ، الاطارات المركبة وغيرها . ولايجاد القوى الداخلية فى جميع أضلاع الاطار يجب أولا ايجاد ردود الأفعال الخارجية ثم بعد ذلك يتم تقسيم الاطار الى عدة أجزاء حرة الحركة (Free-body-diagram) ودراسة اتزان كل جزء على حدة باستخدام شروط الاتزان المعروفة (مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الأفقى = صفر ، مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الرأسى = صفر ، مجموع عزوم الانحناء حول أى نقطة = صفر) . وفى حالة الأجزاء المائلة يتم تحليل جميع القوى الموجودة على هذه الأجزاء الى مركبات فى اتجاه محور هذا الجزء والأخرى عمودية عليه ، وهذه المركبات تمثل القوى العمودية وقوى القص ، وبعد الانتهاء من تحليل هذه القوى يجب عمل تحقق حسابى من أن جميع مركبات القوى فى اتجاه هذا الجزء مساوية للصفر وكذلك مجموع مركبات القوى فى الاتجاه العمودى مساوية للصفر أيضا . ويتم رسم مؤثرات الاجهاد الداخلى بحيث يكون خط القاعدة هو نفسه محور الاطار ويكون رسم احداثيات مؤثرات الاجهاد الداخلى لجزء ما من الاطار عمودية على هذا الجزء ، وفى حالة القوى العمودية وقوى القص تكون القيم الموجبة خارج الاطار والقيم السالبة داخل الاطار ، والعكس فى حالة عزوم الانحناء فان القيم الموجبة تكون داخل الاطار والقيم السالبة خارج الاطار .

أمثلة عددية

مثال ١

للاطار البسيط الموضح بالشكل رقم (١) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

١. يتم استبدال الحمل الموزع الموجود على الجزء (CD) الى حمل مركز مكافئ قيمته ٢٤ طن .
٢. يتم ايجاد ردود الأفعال الخارجية عند A ، B كما سبق ذكره فى الفصل الأول وذلك على النحو التالى :

أ- مجموع مركبات القوى الأفقية = صفر

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_a = 6$ ton

ب- مجموع عزوم القوى حول الركيزة (A) = صفر ومنها نوجد (y_b)

$\Sigma M@A = 0.0$

$\Sigma M@A = 6*4 + 24*4 + 6*10 - y_b*8 = 0.0$

$\therefore y_b = 22.5$ ton

ج- مجموع العزوم حول الركيزة (B) = صفر ومنها نوجد (y_a)

$\Sigma M@B = 0.0$

$\Sigma M@B = 24*4 - 6*2 - 6*2 - 6*2 - y_a*8 = 0.0$

$\therefore y_a = 7.5$ ton

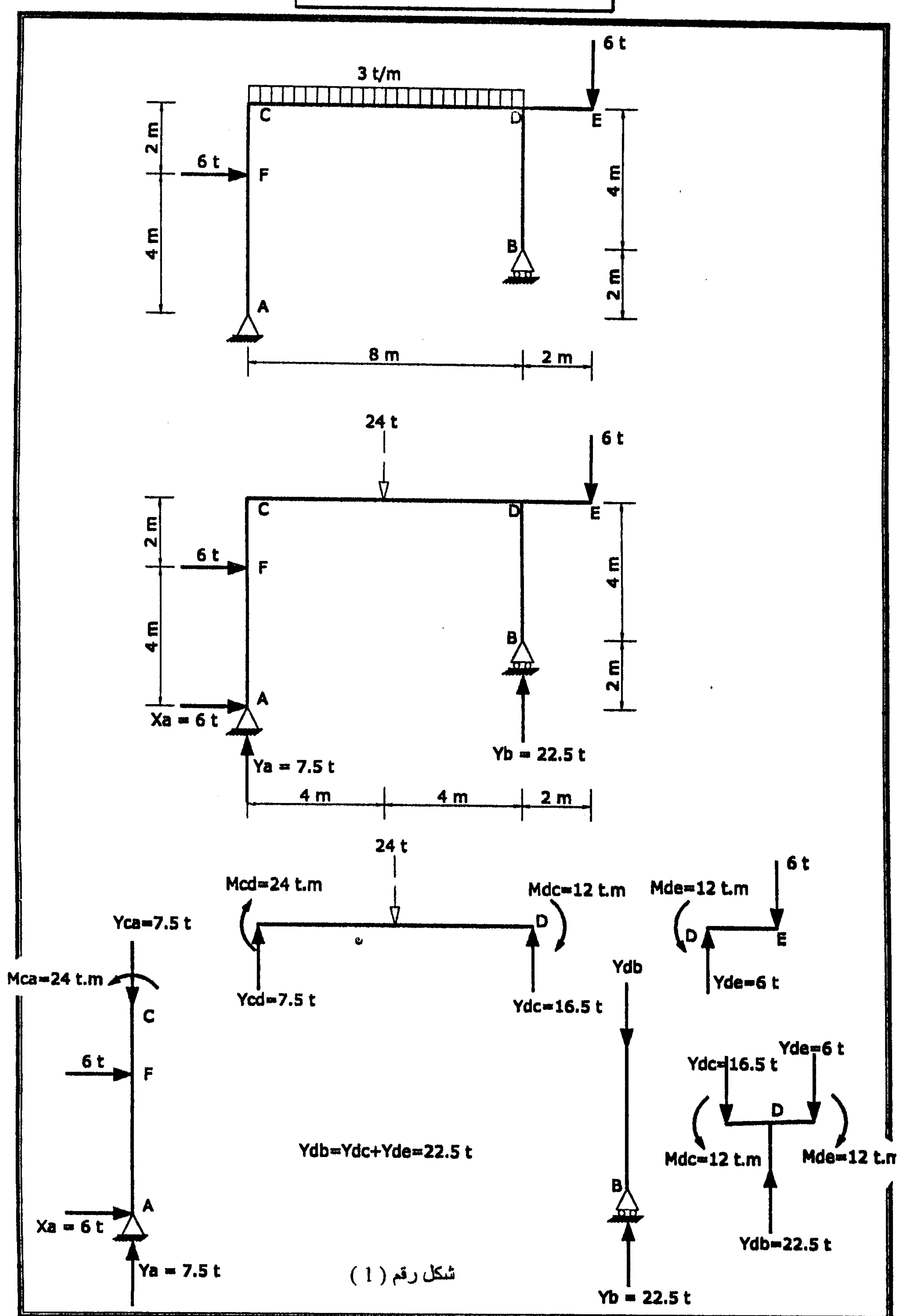
د- التحقق الحسابى باستخدام شرط مجموع القوى الرأسية

Check

$\Sigma Y = (7.5 + 22.5) - (24 + 6) = 30 - 30 = 0.0$ $\therefore$ O.K.

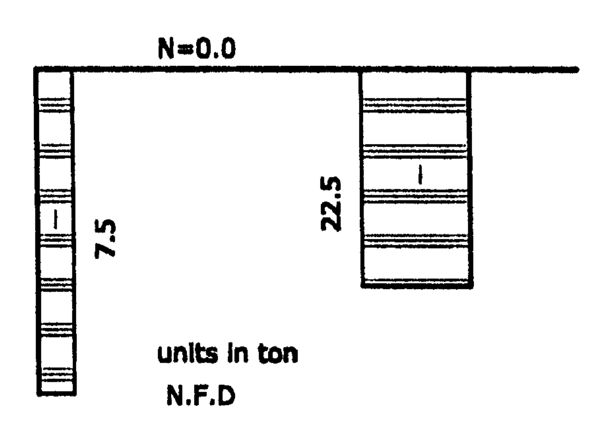
٣. يتم رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى وذلك على النحو التالى :

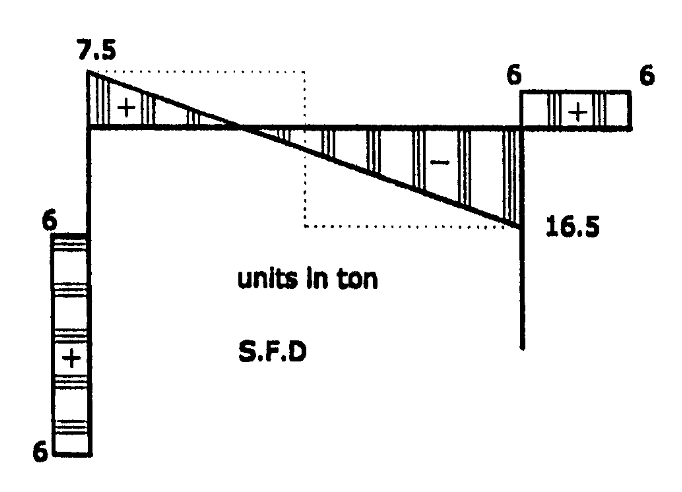
يتم تقسيم الاطار الى مجموعة من الأجزاء حرة الحركة (Free- body - diagram) ، ويتم دراسة اتزان كل جزء على حدة وذلك على أساس أن كل جزء له بداية ونهاية وتكون مؤثرات الاجهاد الداخلى البداية

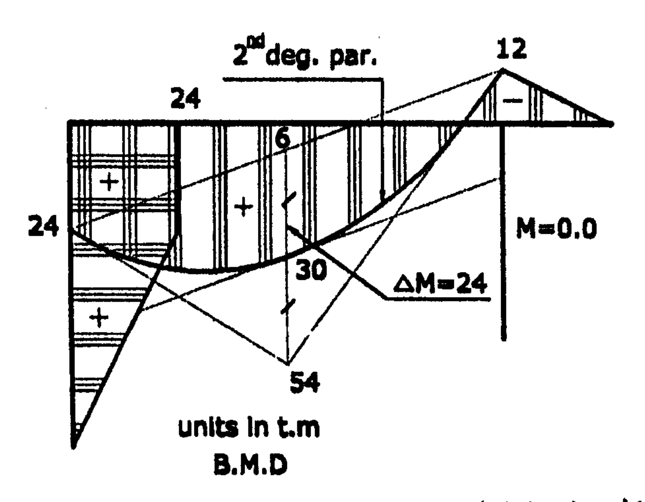


6 t
3 t/m
C
D
E
2 m
6 t
F
4 m
4 m
B
2 m
A
8 m
2 m
24 t
6 t
Xa = 6 t
Ya = 7.5 t
Yb = 22.5 t
4 m
4 m
2 m
Mcd=24 t.m
Mdc=12 t.m
Mde=12 t.m
Yca=7.5 t
Mca=24 t.m
Ycd=7.5 t
Ydc=16.5 t
Ydb
Yde=6 t
Ydc=16.5 t
Yde=6 t
Mdc=12 t.m
Mde=12 t.m
Ydb=Ydc+Yde=22.5 t
Ydb=22.5 t
Yb = 22.5 t

شكل رقم (1)







تابع شكل رقم (1)

معروفة وعند النهاية غير معروفة ، ولمعرفة مؤثرات الاجهاد الداخلى عند النهاية يجب تطبيق شروط الاتزان الثلاثة المعروفة ، ثم ننتقل بعد ذلك الى الجزء الثانى وتكون القوى المؤثرة عند بداية الجزء الثانى هى نفسها القوى المؤثرة عند نهاية الجزء السابق له وفى عكس الاتجاه بالاضافة الى القوى الخارجية عند هذه البداية ان وجدت ، أو بمعنى آخر يتم تطبيق شروط الاتزان على الوصلة بين هذين الجزءين وخصوصا اذا كانت الوصلة تحتوى على أكثر من جزءين ؛ وبتطبيق شروط الاتزان مرة أخرى نوجد مؤثرات الاجهاد الداخلى عند النهاية الأخرى لهذا الجزء وهكذا حتى نصل الى آخر جزء فتكون بدايته هى نهاية الجزء السابق له مباشرة ونهايته هى احدى الركائز الخارجية وبتطبيق شروط الاتزان على الجزء الأخير نوجد القوى المؤثرة عند نهاية هذا الجزء. وللتحقق من سلامة الحسابات السابقة يجب أن تكون القوى المحسوبة عند نهاية الجزء الأخير هى نفسها قيم ردود الأفعال السابق حسابها فى البند رقم (٢) من هذا المثال. وفى هذا المثال يتم تقسيم الاطار الى أربعة أجزاء وهى (AC, CD, DE, & DB) .

اولا : الجزء (AC)

القوى المؤثرة عند النهاية (A) معروفة وهى قوة أفقية قيمتها ٦ طن الى اليسار ، وقوة رأسية الى أعلى قيمتها ٧,٥ طن . وبتطبيق شروط الاتزان عند النهاية الأخرى (C) نوجد مركبات القوى وعزوم الانحناء المؤثرة عندها وهى (X_{ca} , Y_{ca} , M_{ca}) .

فمن تطبيق شرط مجموع القوى الأفقية = صفر نجد أن ($X_{ca} = 0.0$) .

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore -6 + 6 - X_{ca} = 0.0$, or $X_{ca} = 0.0$

ومن تطبيق شرط مجموع القوى الراسية = صفر نجد أن ($Y_{ca} = 7.5$ t) الى أسفل .

$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore 7.5 - Y_{ca} = 0.0$, or $Y_{ca} = 7.5$ ton .

ومن تطبيق شرط مجموع العزوم عند النهاية (C) لهذا الجزء نجد أن ($M_{ca} = 24$ t.m) ضد عقارب الساعة .

$\Sigma M@C = 0.0$ for part CA , $\therefore 6*6 - 6*2 - M_{ca} = 0.0$, or $M_{ca} = 24$ t.m

ثانيا : الجزء (CD)

حيث أن الوصلة (CD) تحتوى على ضلعين فقط لذلك تكون القوى والعزوم المؤثرة عند (C) بالنسبة للضلع (CD) هى نفسها القوى والعزوم المؤثرة عند (C) بالنسبة للضلع (CA) ولكن بعكس الاشارة ، اى أن :

$X_{cd} = 0.0$, $Y_{cd} = 7.5$ ton , $M_{cd} = 24$ t.m

كما هو موضح بالشكل رقم (١) ،أو يمكن ايجاد القوى والعزوم عند (C) بالنسبة للضلع (CD) بتطبيق شروط الاتزان عند الوصلة (C) . ولايجاد القوى والعزوم عند نقطة (D) بالنسبة للضلع (CD) نطبق شروط الاتزان وذلك على النحو التالى :

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_{dc} = 0.0$

$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore Y_{dc} = 24 - 7.5 = 16.5$ ton

$\Sigma M@D = 0.0$, $\therefore 24*4 - 7.5*8 - 24 - M_{dc} = 0.0$, or $M_{dc} = 12$ t.m

ثالثا : الجزء (DE)

نلاحظ أن الجزء (DE) عبارة عن كابولى وأن القوى عند الطرف الحر (E) معلومة وبالتالى يمكن ايجاد القوى عند النقطة (D) بالنسبة للضلع (DE) بتطبيق شروط الاتزان ، كما نلاحظ أنه لايمكن ايجاد القوى والعزوم عند هذه النقطة – نقطة (D) بالنسبة للضلع (DE) – بعكس القوى عند نقطة (D) من الجزء (CD) وذلك لأن الوصلة (D) تحتوى على ثلاثة أضلاع ، وعليه لابد من ايجاد القوى عند (D) من ضلعين أولا ثم بعد ذلك نوجد القوى عند (D) للضلع الثالث باستخدام شروط الاتزان . وعلى هذا تكون القوى والعزوم عند نقطة (D) بالنسبة للضلع (DE) على النحو التالى : -

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_{de} = 0.0$

$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore Y_{de} = 6$ ton

$\Sigma M@D = 0.0$, $\therefore 6*2 - M_{de} = 0.0$, or $M_{de} = 12$ t.m

رابعا : الجزء (DB).

نوجد القوى والعزوم عند نقطة (D) من الجزء (DB) وذلك بأخذ اتزان الوصلة (D) – بتطبيق شروط الاتزان على هذه الوصلة – كما يلى : -

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_{db} = 0.0$

$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore Y_{db} = 16.5 + 6 = 22.5$ ton

$\Sigma M = 0.0$, $\therefore 12 - 12 - M_{db} = 0.0$, or $M_{db} = 0.0$

ولايجاد القوى والعزوم عند نقطة (B) – باعتبار أنها مجهولة – نطبق شروط الاتزان على الضلع (DB) كما يلى : -

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_b = 0.0$

$\Sigma Y = 0.0$, $\therefore Y_b = 22.5$ ton

$\Sigma M@D = 0.0$, $\therefore M_b = 0.0$

بعد ايجاد القوى والعزوم عند نقطة (B) نلاحظ أنها نفس القوى والعزوم السابق ايجادها من ردود الأفعال وهذا يؤكد صحة الحل .

بعد ايجاد القوى والعزوم عند بداية ونهاية كل جزء نرسم أشكال مؤثرات القوى الداخلية ، على أساس أن القوى العمودية هى القوى الموازية للضلع وتكون موجبة اذا كانت شد وتكون سالبة اذا كانت ضغط . كما أن قوى القص هى القوى العمودية على الضلع وتكون قوى القص موجبة اذا كانت تدور حول القطاع فى اتجاه عقارب الساعة ، وتكون سالبة اذا كانت تدور فى اتجاه ضد عقارب الساعة . كما أن العزم يعتبر موجبا اذا أحدث تقوسا للضلع الى داخل الاطار ، ويكون سالبا اذا أحدث تقوسا للضلع الى خارج الاطار . وترسم أشكال القوى العمودية وقوى القص الموجبة خارج الاطار والسالبة داخل الاطار ، ويرسم شكل عزوم الانحناء الموجب داخل الاطار والعزوم السالبة خارج الاطار ، أو بمعنى آخر يرسم شكل عزوم الانحناء فى اتجاه التقوس . ويكون رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى لأى ضلع بحيث تكون احداثيات هذا الشكل عمودية على هذا الضلع ، أنظر شكل رقم (١) .

مثال ٢

للاطار البسيط الموضح بالشكل رقم (٢) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

أولا : ايجاد ردود الأفعال

يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة وتؤثر فى مركز الثقل كما هو موضح بالشكل رقم (٢) ثم بعد ذلك يتم تطبيق شروط الاتزان لايجاد ردود الأفعال الخارجية وذلك على النحو التالى : -

$\Sigma X = 0.0$, $\therefore X_a = 5$ ton

$\Sigma M@A = 0.0$, $\therefore -6*2 + 12*2 + 12*4 + 12*7 + 6*8.5 - 5*6 - Y_b*10 = 0.0$

or $-12 + 156 + 51 - 30 - 10\,Y_b = 0.0$ $\therefore Y_b = 16.5$ ton

$\Sigma M@B = 0.0$, $\therefore 6*1.5\ 5*6 + 12*3 + 12*6 + 12*8 + 6*12 - Y_a*10 = 0.0$

or $9 + 30 + 36 + 72 + 96 + 72 = 10Y_a$ $\therefore Y_a = 31.5$ ton

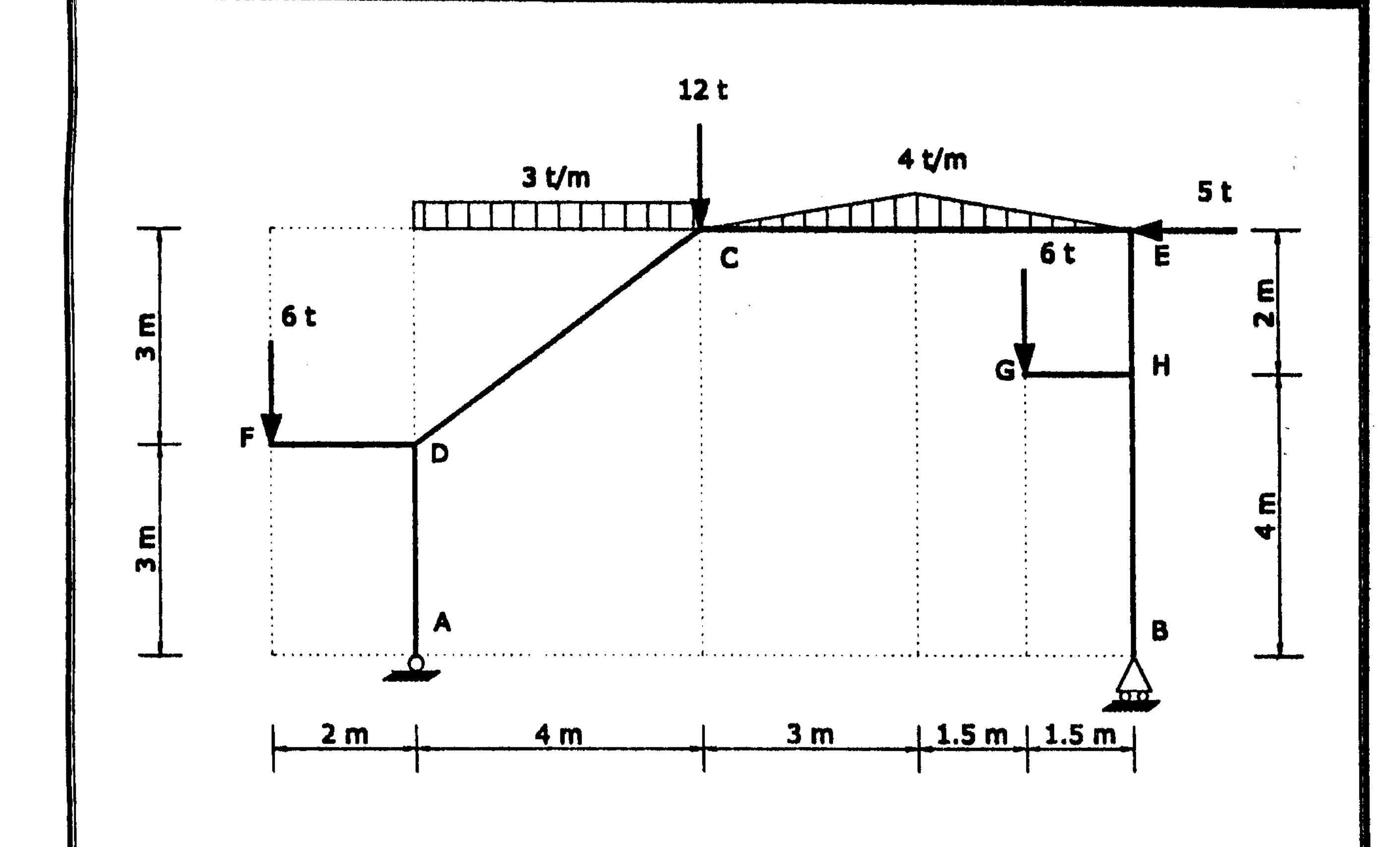
Check $\Sigma Y = (31.5 + 16.5) - (6 + 12 + 12 + 12 + 6) = 48 - 48 = 0.0$, $\therefore$ O.K.

ثانيا : ايجاد القوى الداخلية

يتم تجزئ الاطار الى سبعة أجزاء وهى (AD , FD , DC , CE , EH , GH , BH) ويتم بعد ذلك دراسة اتزان كل جزء على حدة كما سبق فى المثال السابق ، وكما هو موضح بالشكل رقم (٢) .

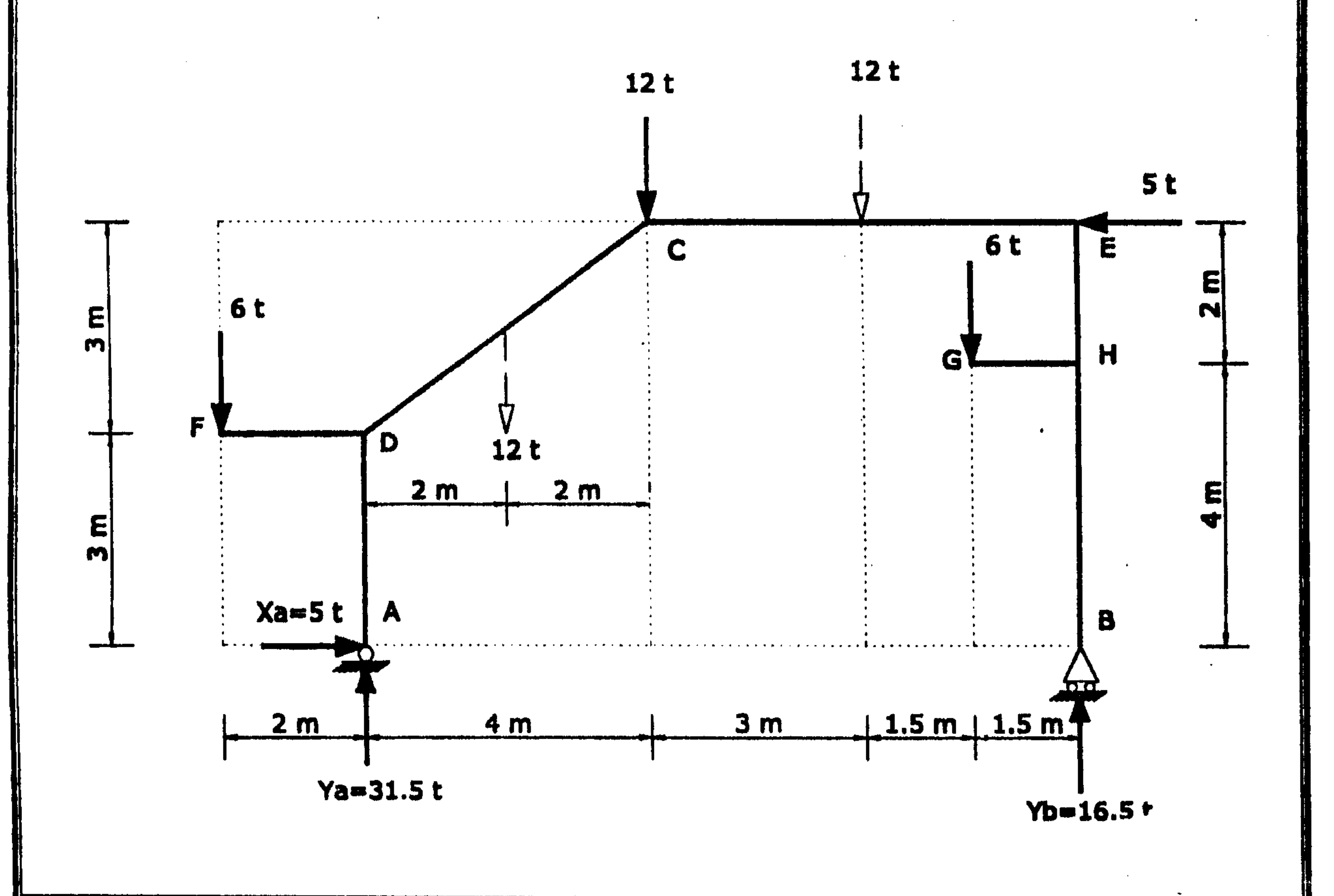
ثالثا : تحليل القوى فى حالة وجود أضلاع مائلة ، فى هذا المثال الضلع (DC) .

يتم تحليل جميع القوى المركزة والمستبدلة الموجودة على الضلع (DC) الى مجموعة من المركبات الموازية للضلع والعمودية عليه ، كما هو موضح بالشكل رقم (٢) . كما يتم التحقق من صحة عملية التحليل وذلك باختبار مجموع مركبات القوى فى اتجاه الضلع ومجموع مركبات القوى فى الاتجاه العمودى

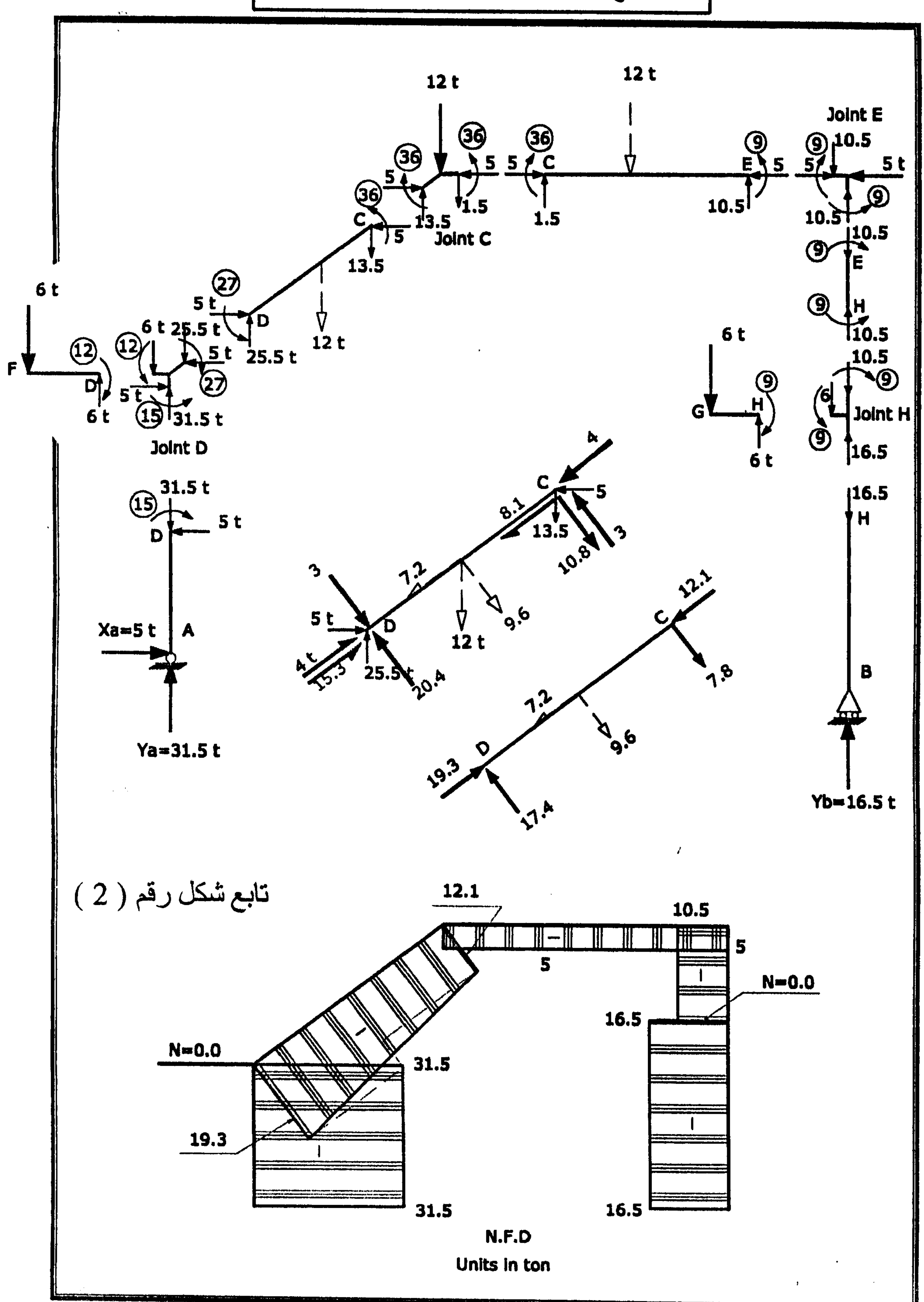


12 t
3 t/m
4 t/m
5 t
6 t
6 t
C
E
G
H
F
D
A
B
3 m
3 m
2 m
4 m
2 m
4 m
3 m
1.5 m
1.5 m

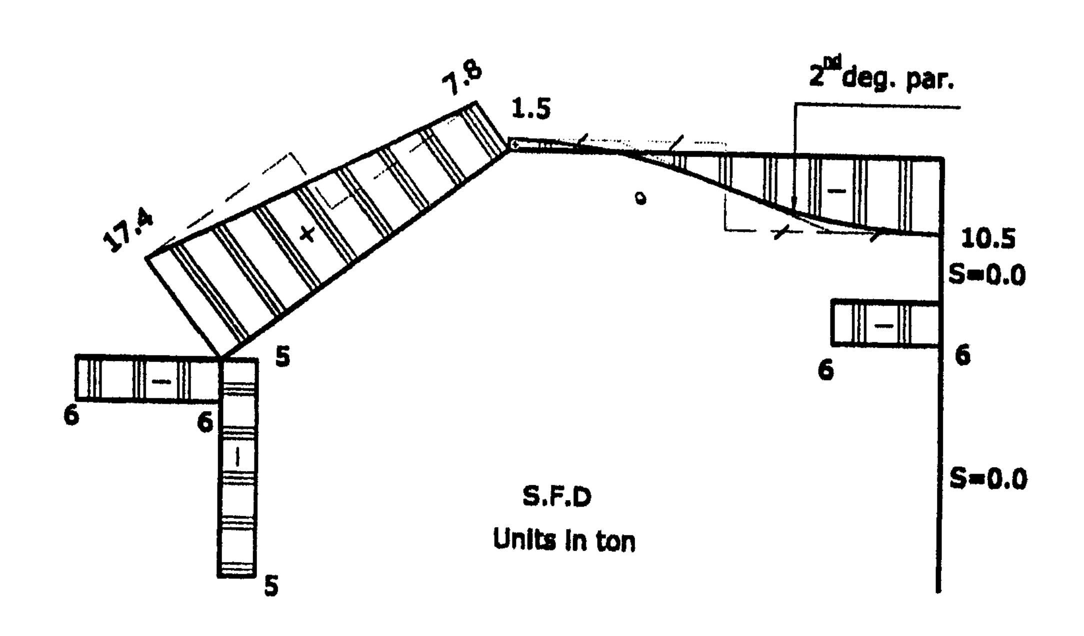

شكل رقم (2)

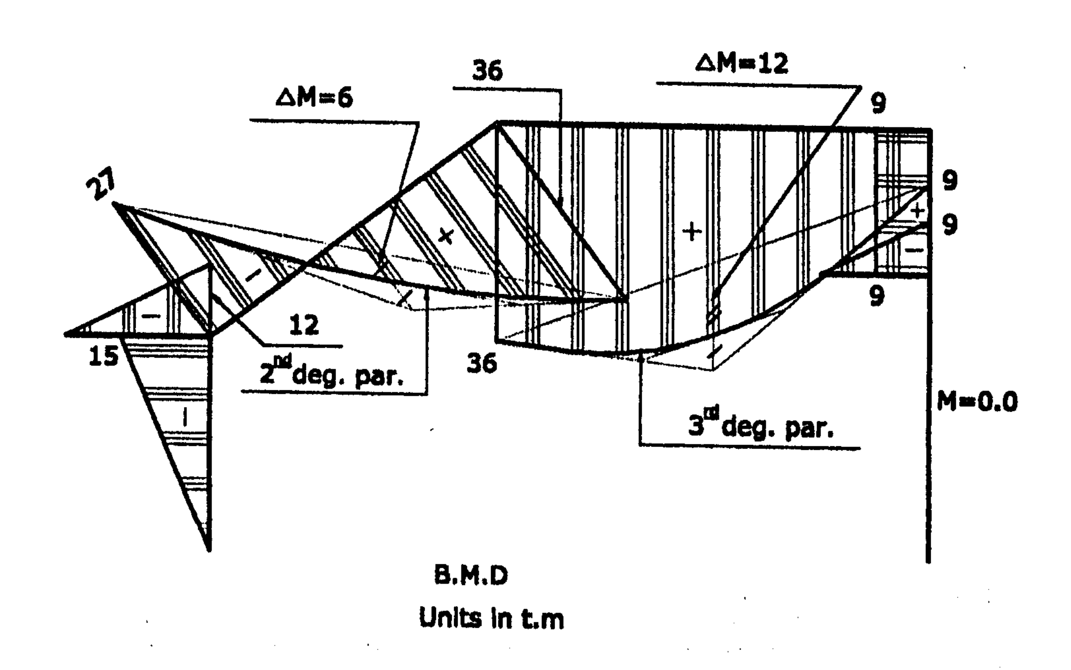


12 t
12 t
5 t
6 t
6 t
12 t
C
E
G
H
F
D
A
B
3 m
3 m
2 m
4 m
2 m
2 m
Xa=5 t
2 m
4 m
3 m
1.5 m
1.5 m
Ya=31.5 t
Yb=16.5 t



تابع شكل رقم (2)





تابع شكل رقم (2)

على الضلع ومقارنة ذلك بالصفر ، فاذا كانت النتيجة مساوية للصفر دل ذلك على صحة التحليل وان كانت غير ذلك فيجب اعادة التحليل مرة أخرى .

رابعا : رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى

بالاستعانة بالمثال رقم (١) وأشكال القوى الداخلية الموجودة فى شكل رقم (٢) يمكن تتبع كيفية رسم مؤثرات الاجهاد الداخلى .

مثال٣

للاطار ثلاثى المفاصل الموضح بالشكل رقم (٣) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

أولا : ايجاد ردود الأفعال

يتم استبدال الأحمال الموزعة بأحمال مركزة مكافئة وتؤثر فى مركز الثقل كما هو موضح بالشكل رقم (٣) ثم بعد ذلك يتم تطبيق شروط الاتزان لايجاد ردود الأفعال الخارجية وذلك على النحو التالى : -

١. يتم تحليل محصلة رد الفعل عند (B) الى مركبتين احداهما رأسية (Y_{b1}) ، والأخرى (F) فى اتجاه الخط الواصل بين المفصلين (A , B) ، ثم نأخذ مجموع العزوم حول الركيزة (A) ومنه نوجد (Y_{b1}) ، وبعد ذلك نحلل القوة (F) الى مركبتين - احداهما أفقية (X_b) والأخرى رأسية (Y_{b2}) – وذلك أسفل المفصل الداخلى (C) وعلى الخط الواصل بين (A , B) ، ثم نأخذ العزم عند المفصل الداخلى (C) من ناحية اليمين ومنه نوجد (X_b) وباستخدام زاوية ميل الخط الواصل بين (A , B) نوجد (Y_{b2}) فيكون رد الفعل الرأسى النهائى عند (B) – (Y_b) - مساويا لمجموع المركبتين (Y_{b1} , Y_{b2}) .

$\Sigma M@A = 0.0$, $\therefore$ $- 12 - 6*3 + 32*4 - 20*8 + 36*14 + 6*23 - Y_{b1}*20 = 0.0$

or $-12 - 18 + 128 - 160 + 504 + 138 - Y_{b1}*20 = 0.0$

$\therefore$ $Y_{b1} = 29$ ton

M_C right $= 0.0$, $\therefore$ $36*6 + 6*15 - 29*12 + X_b*8.4 = 0.0$

or $216 + 90 - 348 + 8.4\ X_b = 0.0$ $\therefore$ $X_b = 5$ ton

but $Y_{b2} / X_b = 0.2$, or $Y_{b2} = 0.2*X_b = 0.2*5 = 1$ ton (الى أسفل)

$\therefore Y_b = 29 - 1 = 28$ ton

٢. نطبق بقية شروط الاتزان لايجاد ردود الفعل عند (A) ، كما يلى :

$\Sigma Y = 0.0$ $\therefore$ $Y_a + 20 + 28 - 6 - 32 - 36 - 6 = 0.0$, or $Y_a = 32$ ton

$\Sigma X = 0.0$ $\therefore$ $X_a - 5 = 0.0$, or $X_a = 5$ ton

٣. يتم عمل تحقيق حسابى على صحة ردود الأفعال باستخدام شرط من شروط الاتزان التى لم يسبق استخدامها وحساب عزوم الانحناء عند المفصل الداخلى من ناحية اليسار ، كما يلى :

Check , M_C left $= 32*4 + 6*11 + 12 + 5*10 - 32*8 = 128 + 66 + 12 + 50 - 256$

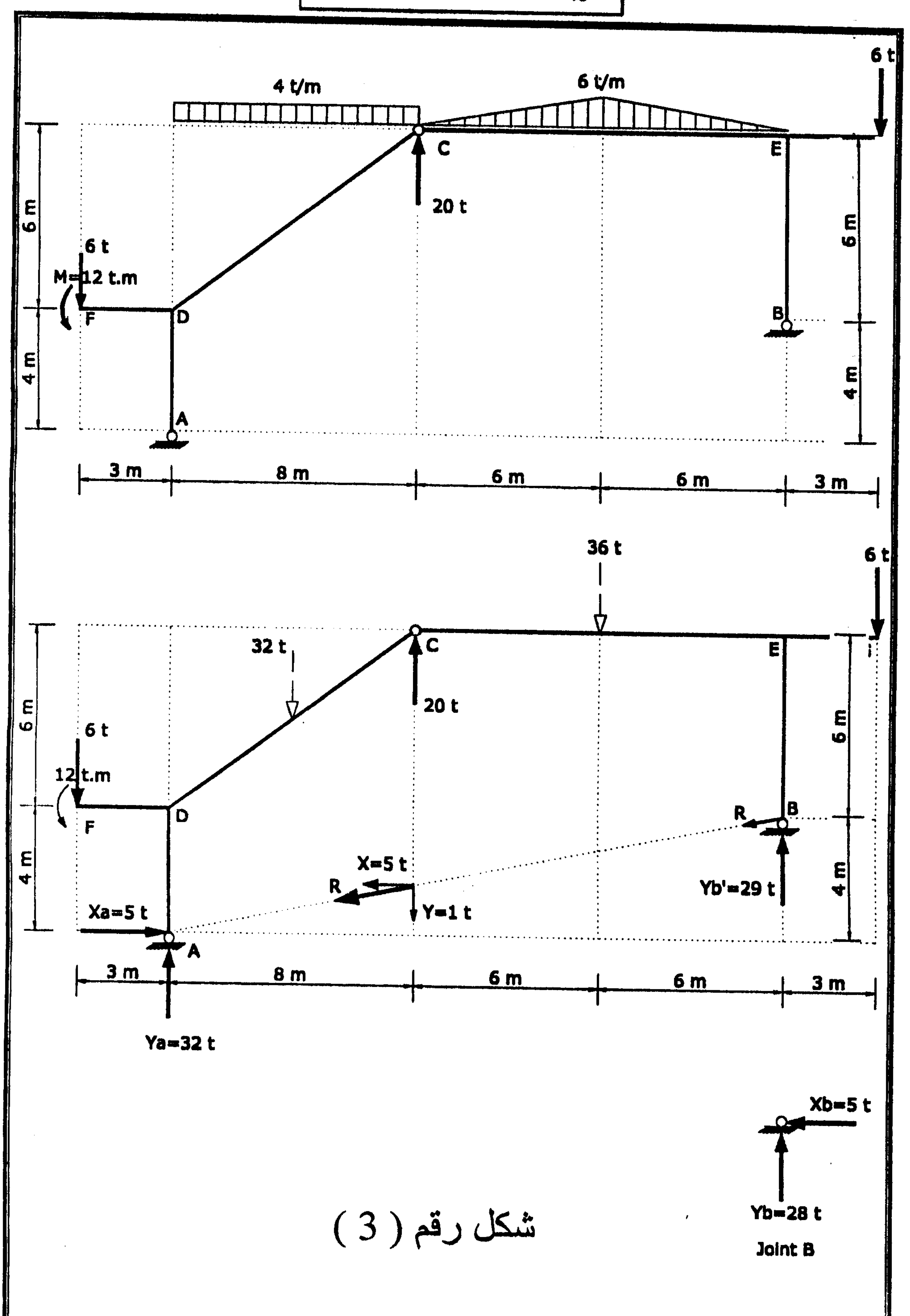
or M_C left $= 256 - 256 = 0.0$ $\therefore$ O.K.

ثانيا : ايجاد القوى الداخلية

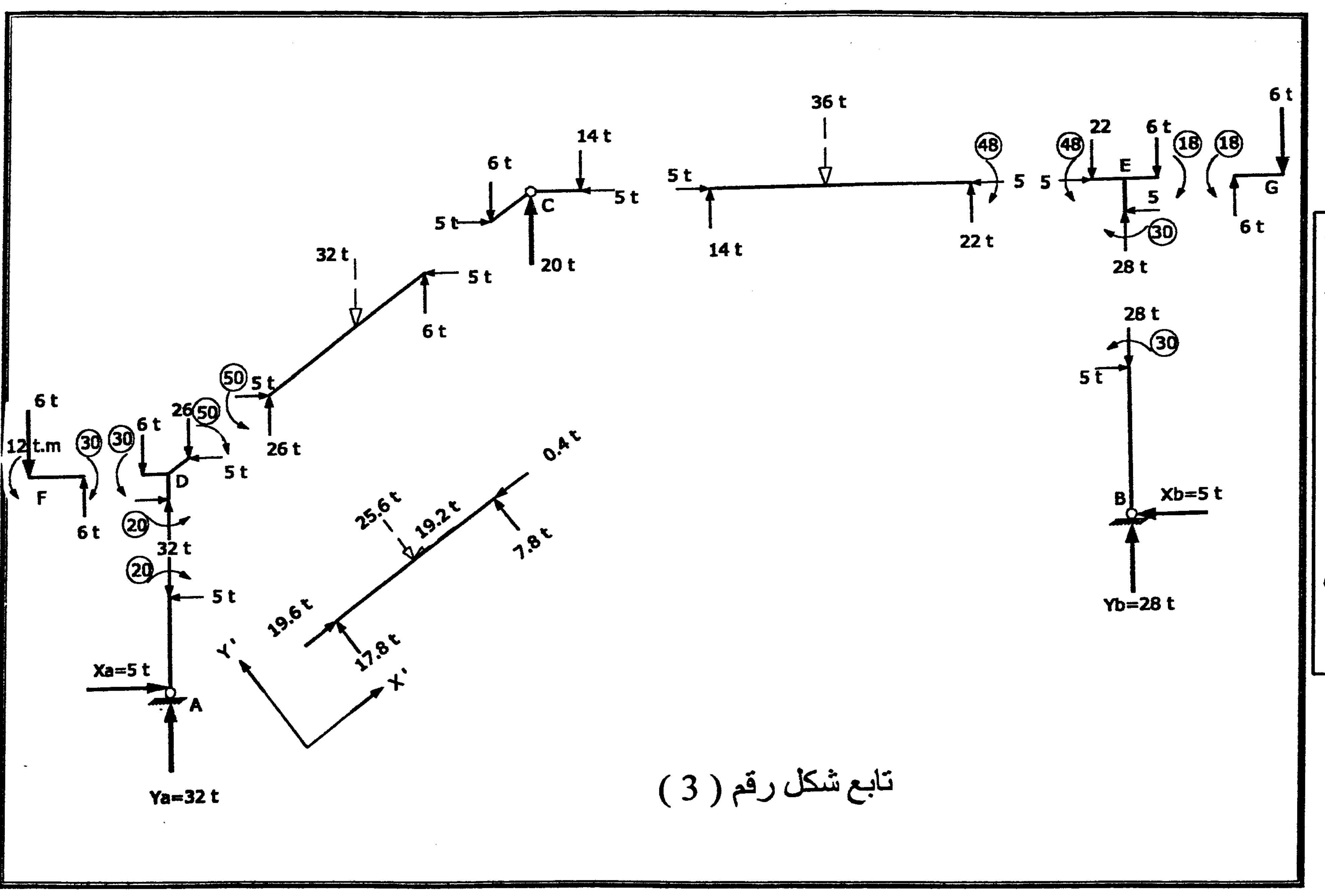
يتم تجزئ الاطار الى ستة أجزاء وهى (AD , FD , DC , CE , BE , EG) ويتم بعد ذلك دراسة اتزان كل جزء على حدة كما سبق فى المثالين السابقين ، وكما هو موضح بالشكل رقم (٣) .

ثالثا : تحليل القوى فى حالة وجود أضلاع مائلة ، فى هذا المثال الضلع (DC) .

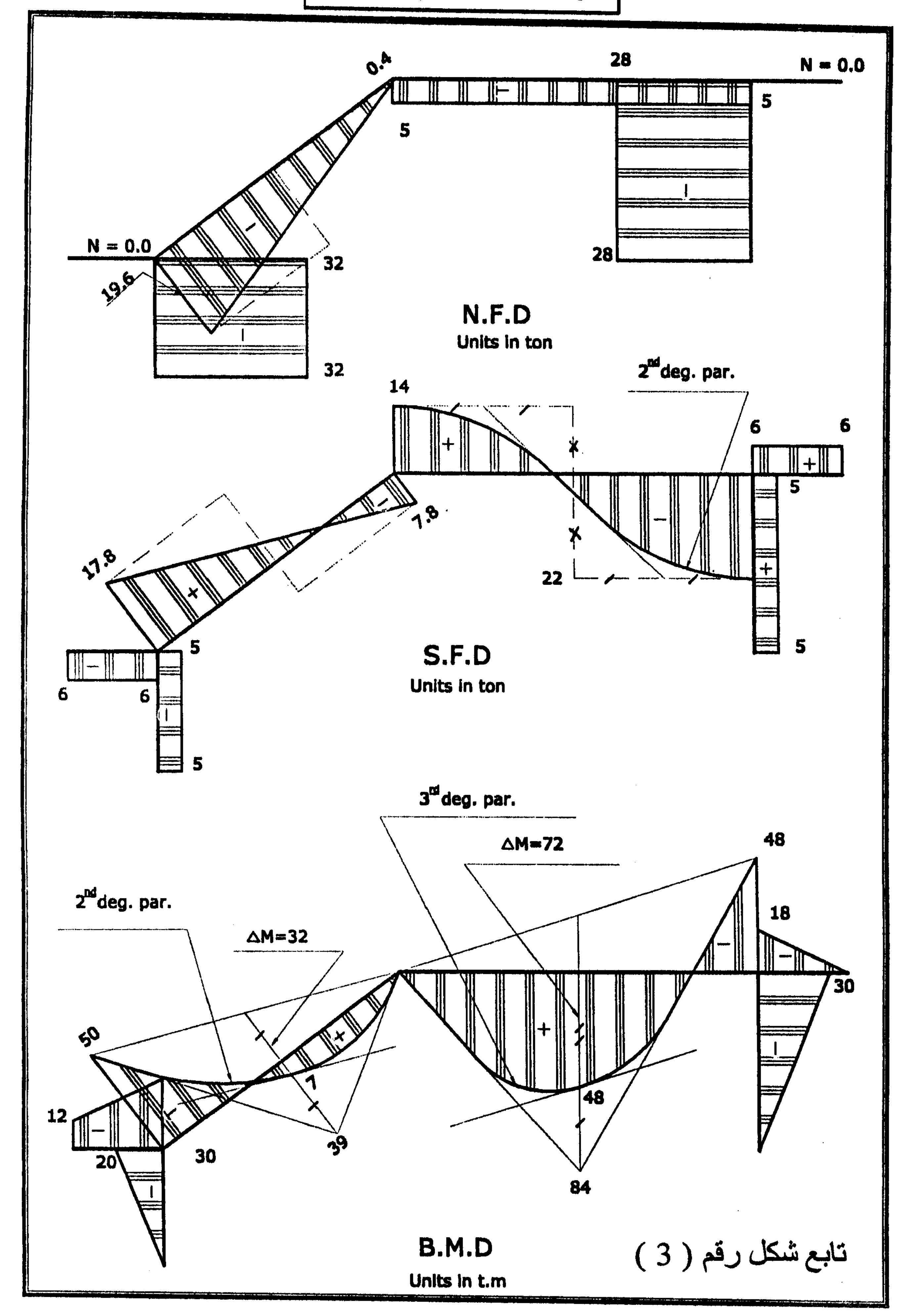
يتم تحليل جميع القوى المركزة والمستبدلة الموجودة على الضلع (DC) الى مجموعة من المركبات الموازية للضلع والعمودية عليه ، كما هو موضح بالشكل رقم (٣) . كما يتم التحقق من صحة عملية التحليل وذلك باختبار مجموع مركبات القوى فى اتجاه الضلع ومجموع مركبات القوى فى الاتجاه العمودى على الضلع ومقارنة ذلك بالصفر ، فاذا كانت النتيجة مساوية للصفر دل ذلك على صحة التحليل وان كانت غير ذلك فيجب اعادة التحليل مرة أخرى .


4 t/m
6 t/m
6 t
C
20 t
E
6 m
6 t
M=12 t.m
F
D
B
4 m
A
3 m
8 m
6 m
6 m
3 m
36 t
6 t
32 t
C
20 t
E
6 t
12 t.m
F
D
R
B
X=5 t
R
Y=1 t
Yb'=29 t
Xa=5 t
A
Ya=32 t
Xb=5 t
Yb=28 t
Joint B

شكل رقم (3)



تابع شكل رقم (3)



تابع شكل رقم (3)

رابعا : رسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى

بالاستعانة بالمثالين رقمى (١ ، ٢) وأشكال القوى الداخلية الموجودة فى شكل رقم (٣) يمكن تتبع كيفية رسم مؤثرات الاجهاد الداخلى .

مثال ٤

للاطار المركب الموضح بالشكل رقم (٤) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

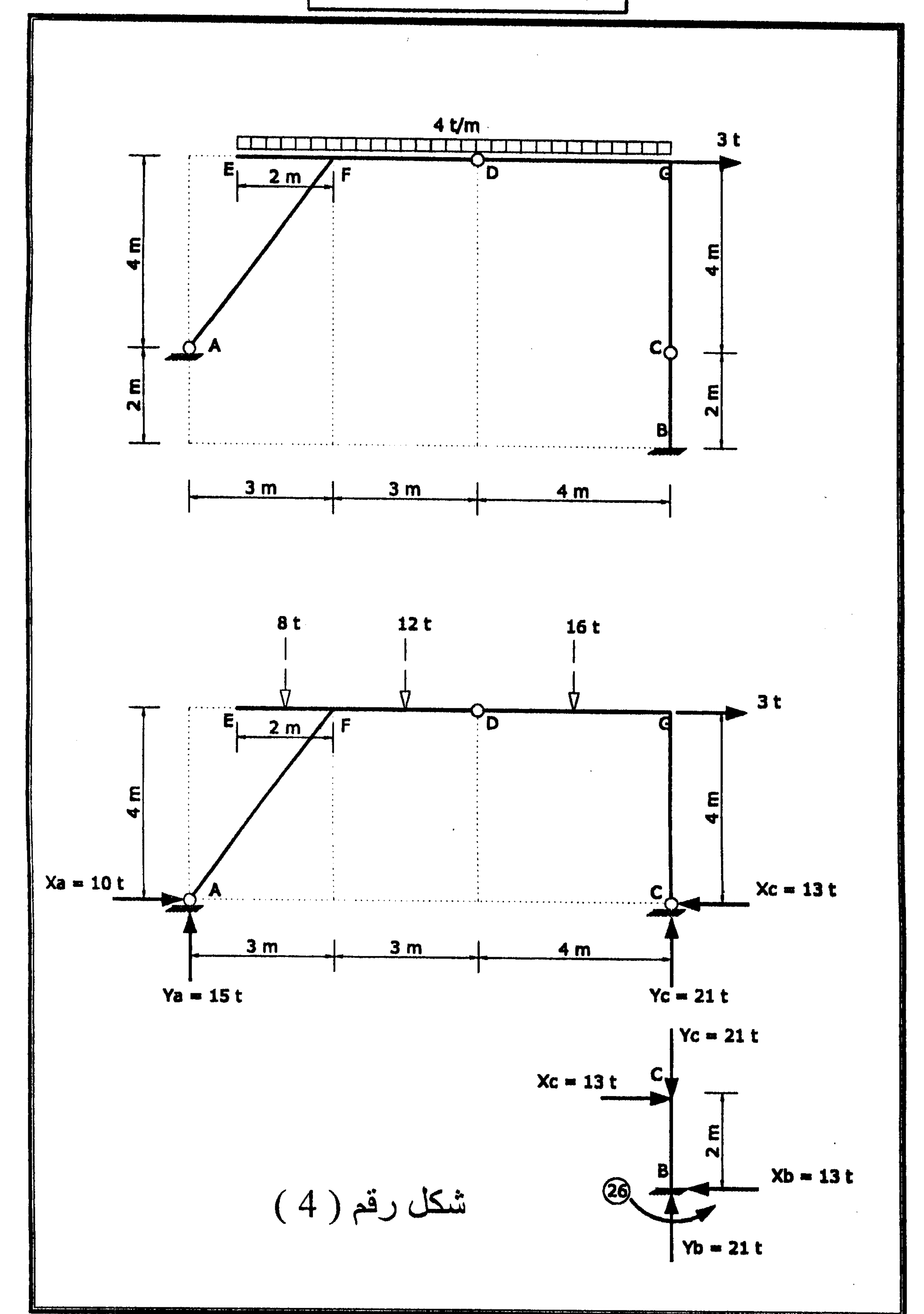
فى حالة الاطارات المركبة يتم فصل الاطار الى جزءين أحدهما اطار ثلاثى المفاصل والآخر بقية الاطار ، ثم بعد ذلك نوجد ردود أفعال الاطار ثلاثى المفاصل بالطرق المعتادة – كما ورد فى الفصل الأول وفى المثال السابق من هذا الفصل – ثم بعد ذلك نعكس ردود الأفعال – الناتجة من الجزء الأول - عند أماكن الفصل بين الجزءين على الجزء الثانى ونطبق عليه شروط الاتزان لايجاد ردود الفعل المجهولة فى هذا الجزء . وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات السابق ذكرها فى الأمثلة السابقة ، أنظر شكل رقم (٤) لتتبع خطوات الحل .

مثال ٥

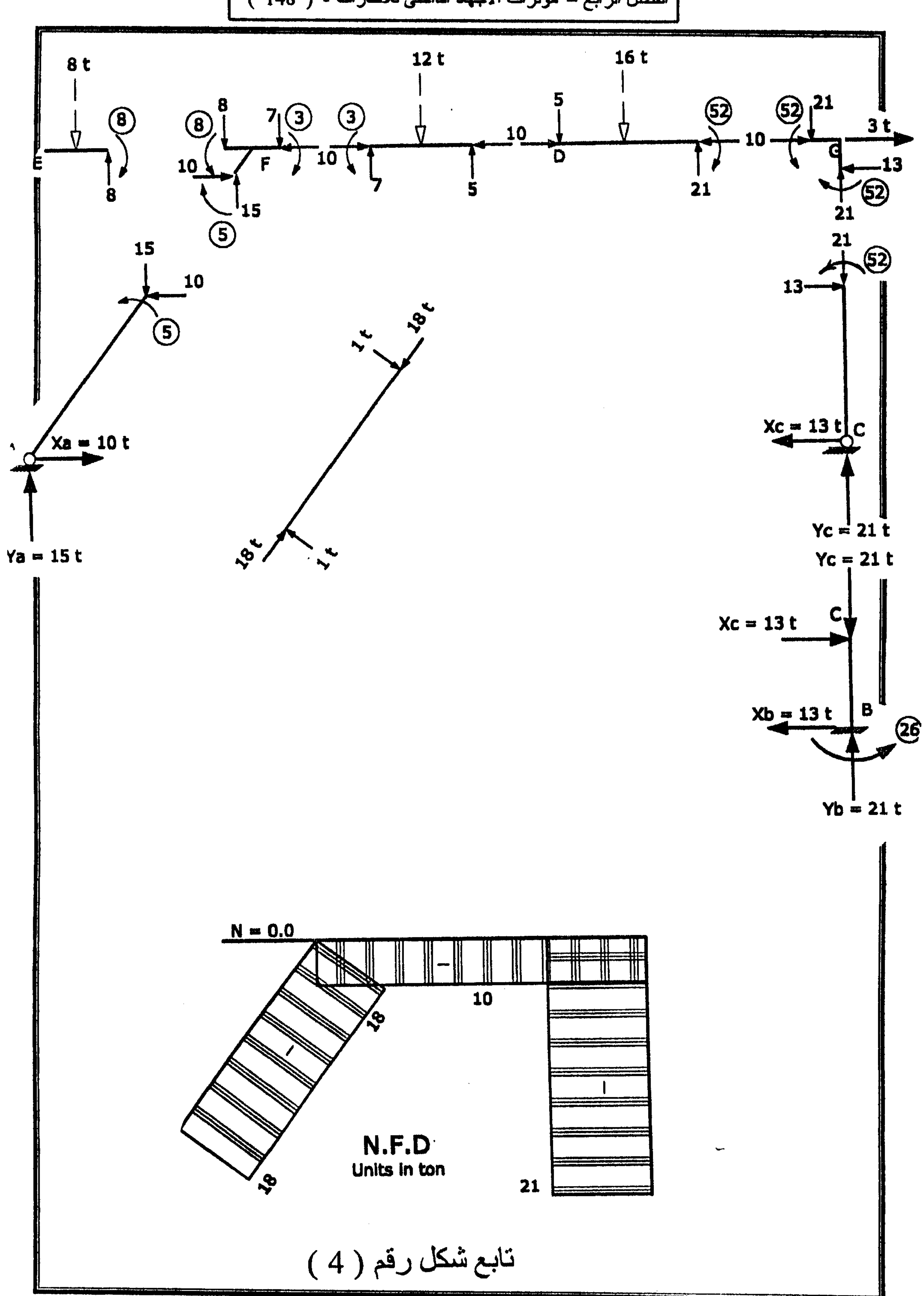
للاطار المغلق الموضح بالشكل رقم (٥) ، المطلوب ايجاد ردود الأفعال الخارجية ورسم أشكال مؤثرات الاجهاد الداخلى .

الحل

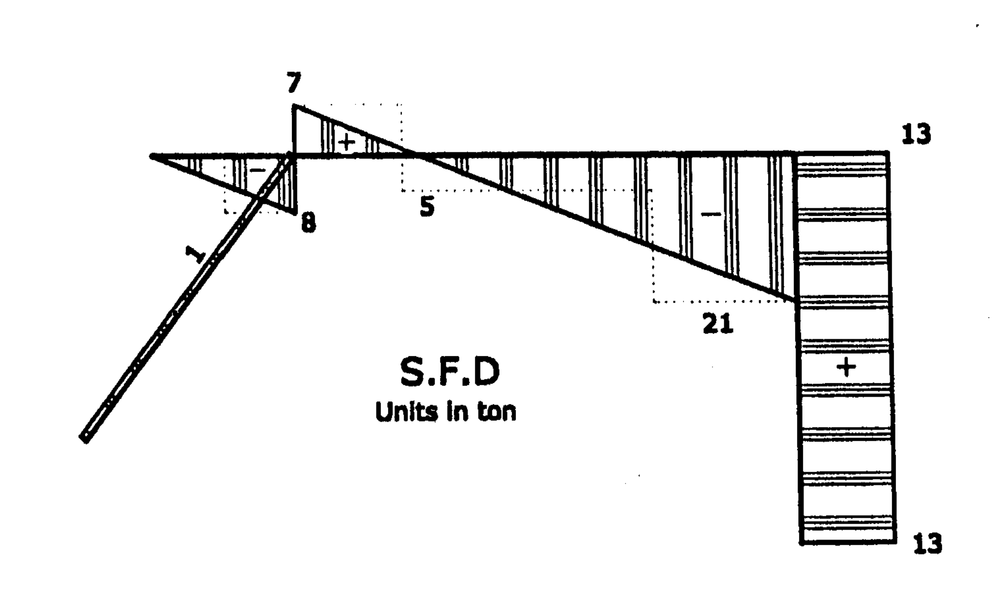
فى حالة الاطارات المغلقة يتم فصل الاطار - عند أى مفصلين داخليين - الى جزءين أحدهما اطار ثلاثى المفاصل والآخر بقية الاطار ، ثم بعد ذلك نوجد ردود أفعال الاطار ثلاثى المفاصل بالطرق المعتادة ثم بعد ذلك نعكس ردود الأفعال – الناتجة من الجزء الأول - عند أماكن الفصل بين الجزءين على الجزء الثانى ونطبق عليه شروط الاتزان لايجاد ردود الفعل المجهولة فى هذا الجزء . وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات السابق ذكرها فى الأمثلة السابقة ، أنظر شكل رقم (٥) لتتبع خطوات الحل .


4 t/m
3 t
E
2 m
F
D
G
4 m
A
C
2 m
B
3 m
3 m
4 m
8 t
12 t
16 t
Xa = 10 t
Xc = 13 t
Ya = 15 t
Yc = 21 t
Xb = 13 t
Yb = 21 t
26

شكل رقم (4)

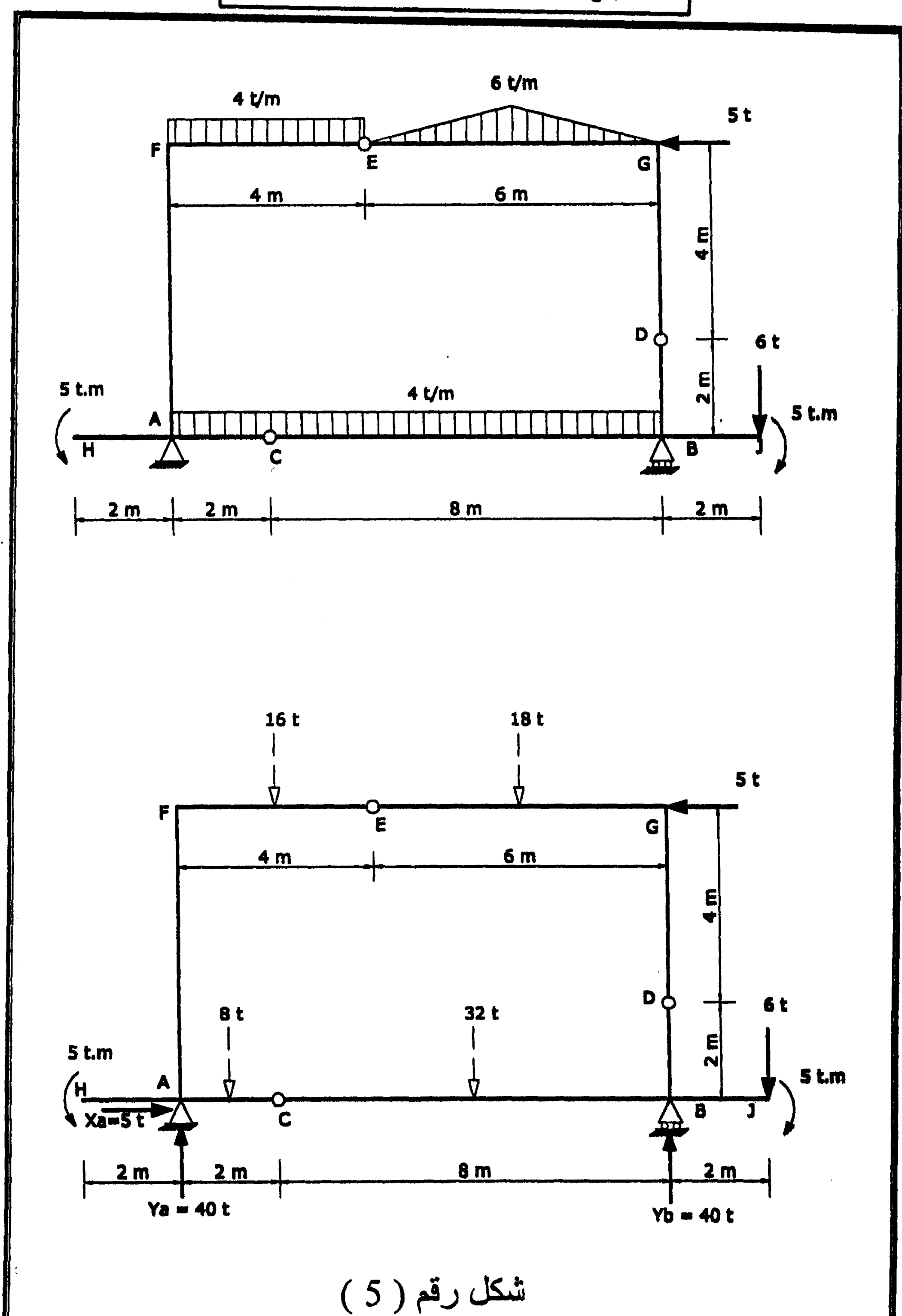


تابع شكل رقم (4)



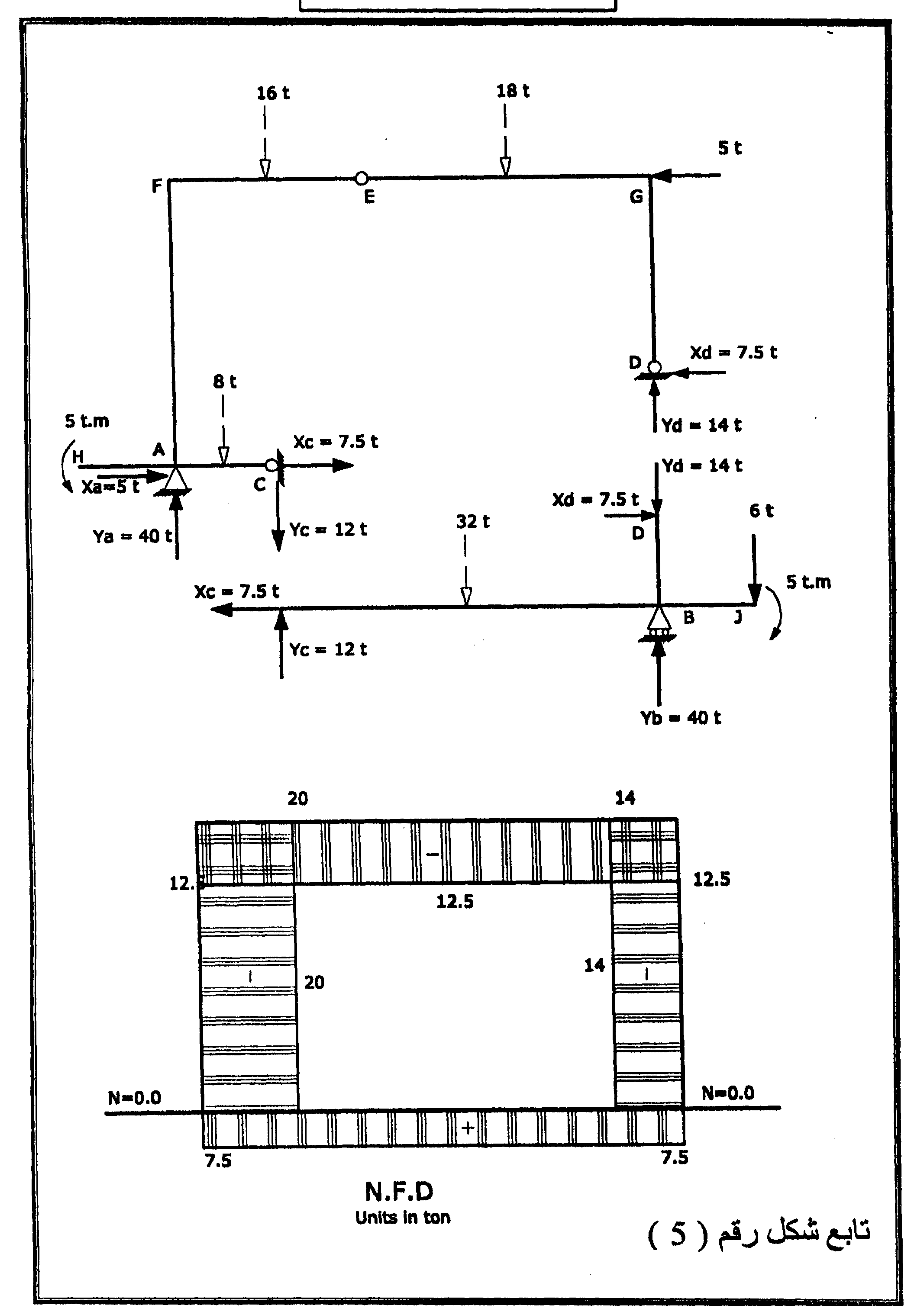
52
ΔM=24.5
ΔM=8
Δ M=2
8
3
ΔM=4.5
+
10
−
52
3
5
7.5
+
2nd deg. par.
21.5
I
B.M.D
Units in t.m
+
26

تابع شكل رقم (4)



4 t/m
6 t/m
5 t
F
E
G
4 m
6 m
4 m
D
6 t
2 m
5 t.m
4 t/m
5 t.m
A
H
C
B
J
2 m
2 m
8 m
2 m
16 t
18 t
5 t
F
E
G
4 m
6 m
4 m
D
6 t
8 t
32 t
2 m
5 t.m
5 t.m
H
A
Xa=5 t
C
B
J
2 m
2 m
8 m
2 m
Ya = 40 t
Yb = 40 t

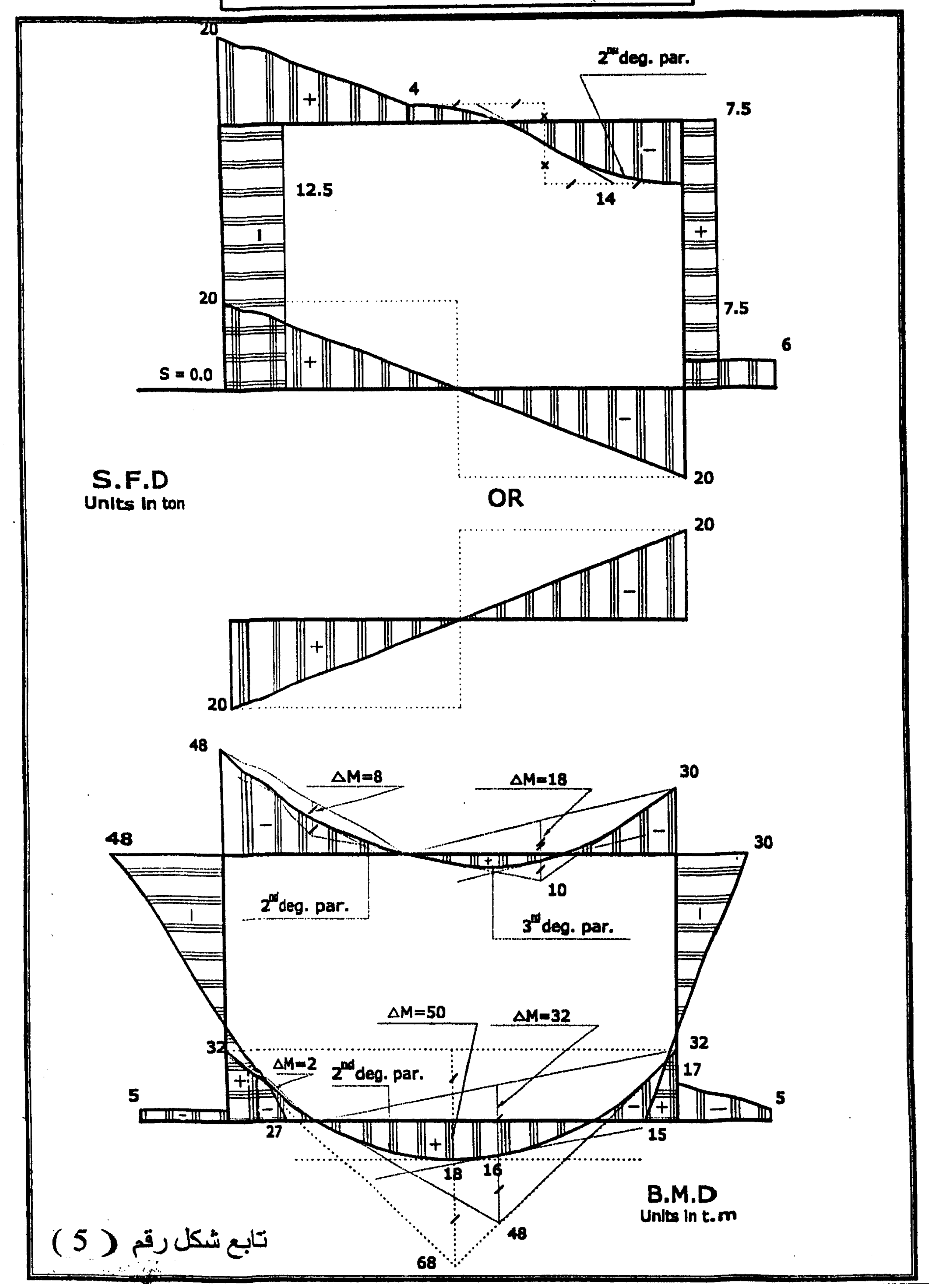
شكل رقم (5)



N.F.D

Units in ton

تابع شكل رقم (5)



تابع شكل رقم (5)

الإطارات العقدية :

من خلال المقارنة بين أشكال عزوم الانحناء الناتجة من الحمل الرأسي (P) المؤثر عند C علـــي الكمـــرة الأفقية و المائلة والعقد (منحني من الدرجة ثانية) الموضحة بالشكل رقم (1) ،نلاحظ لنفـس البحـــر L تكـــون أشكال عزوم الانحناء واحدة،مما يدل علي أن شكل المنشأ لا يؤثر علي أشكال عزوم الانحناء في حالة الأحمال الرأسية.

في الشكل رقم (2) نفس المنشآت السابقة معرضة لحمل أفقي P عند B وتم رسم أشكال عزوم الانحنـــاء لهـــم كلهم. ونلاحظ أن أشكال عزوم الانحناء لها نفس شكل الكمرة وتكون صفر للكمرة الأفقية، مثلث للكمرة المائلـــة، ومنحني من الدرجة الثانية للكمرة العقدية.

الإطار الثلاثي المفاصل والعقد الثلاثي المفاصل في الشكل رقم (3) معرضان لحمل مركز رأسي P عند C، نظـــراً للتماثل $Y_a = Y_b = \frac{P}{2}$ وردود الأفعال الأفقية عند A , B نحصل علي الأتي :

$$M_{C_{right}} = 0.0 = \frac{P}{2} \times \frac{L}{2} - X_a \cdot f$$

$$X_a = X_b = X = \frac{PL}{4f}$$

ونلاحظ أن القيمة $\frac{PL}{4}$ تمثل العزوم عند C_o في الكمرة الأفقية والتي لها نفس البحر L ومعرضة لنفس الحمـــل P ومعني ذلك أنه يمكن إعادة كتابة X علي النحو التالي:

$$X = \frac{M_{C_o}}{f}$$

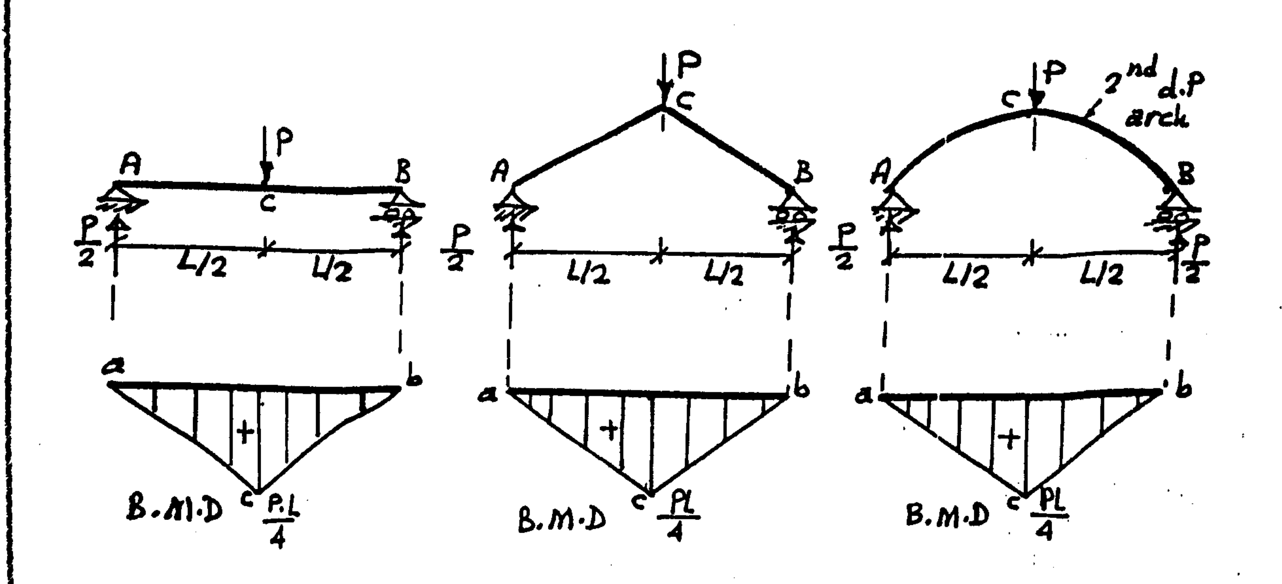
شكل عزم الانحناء الناتج بالشكل رقم (3) يوضح أن B.M.D يكون صفراً في حالة الإطار الثلاثي المفـــاصل وفي حالة العقد الثلاثي المفاصل ممثلة في منحنيان من الدرجة الثانية وقيمة العزم الأقصي $M = \frac{PL}{16}$ وهذه القيمة تمثل ربع القيمة في حالة الكمرة الأفقية.

يتم تحميل الإطار الثلاثي المفاصل والعقد الثلاثي المفاصل مرة أخري بحمل موزع بانتظام.

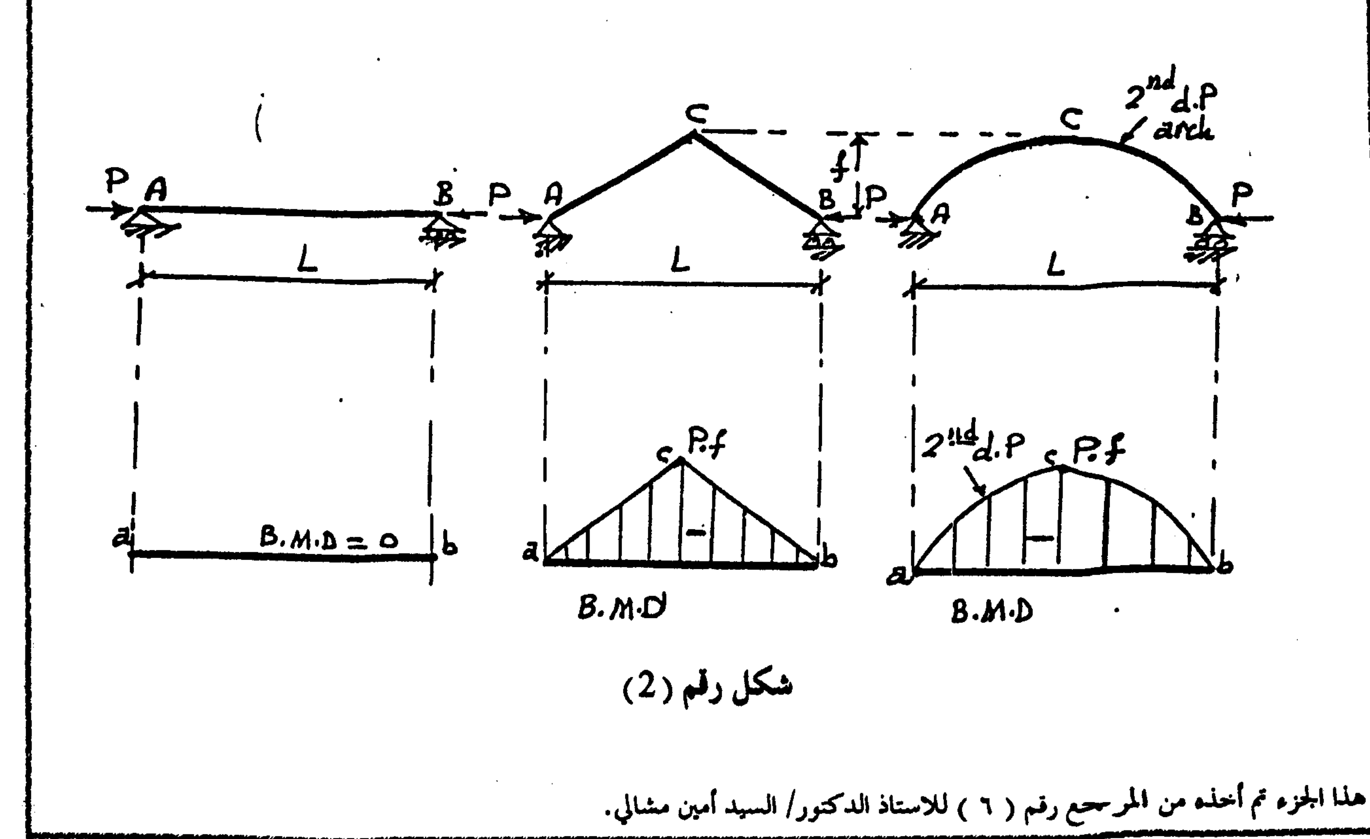
ردود الأفعال الرأسية تكون $Y_a = Y_b = \frac{PL}{2}$ وردود الأفعال الأفقية تكون $X_a = X_b = X$ والتي يتم الحصـــول عليها بنفس الأسلوب الســـابق ، أي :

$$X_a = X_b = X = \frac{M_{C_o}}{f} = \frac{PL^2}{8f}$$

لكن في حالة الإطار الثلاثي المفاصل تمثل بمنحنيان من الدرجة الثانية، بقيمة عزوم قصوي $M = \frac{PL^2}{32}$ والتي تمثل ربـــع القيمة في حالة الكمرة الأفقية.

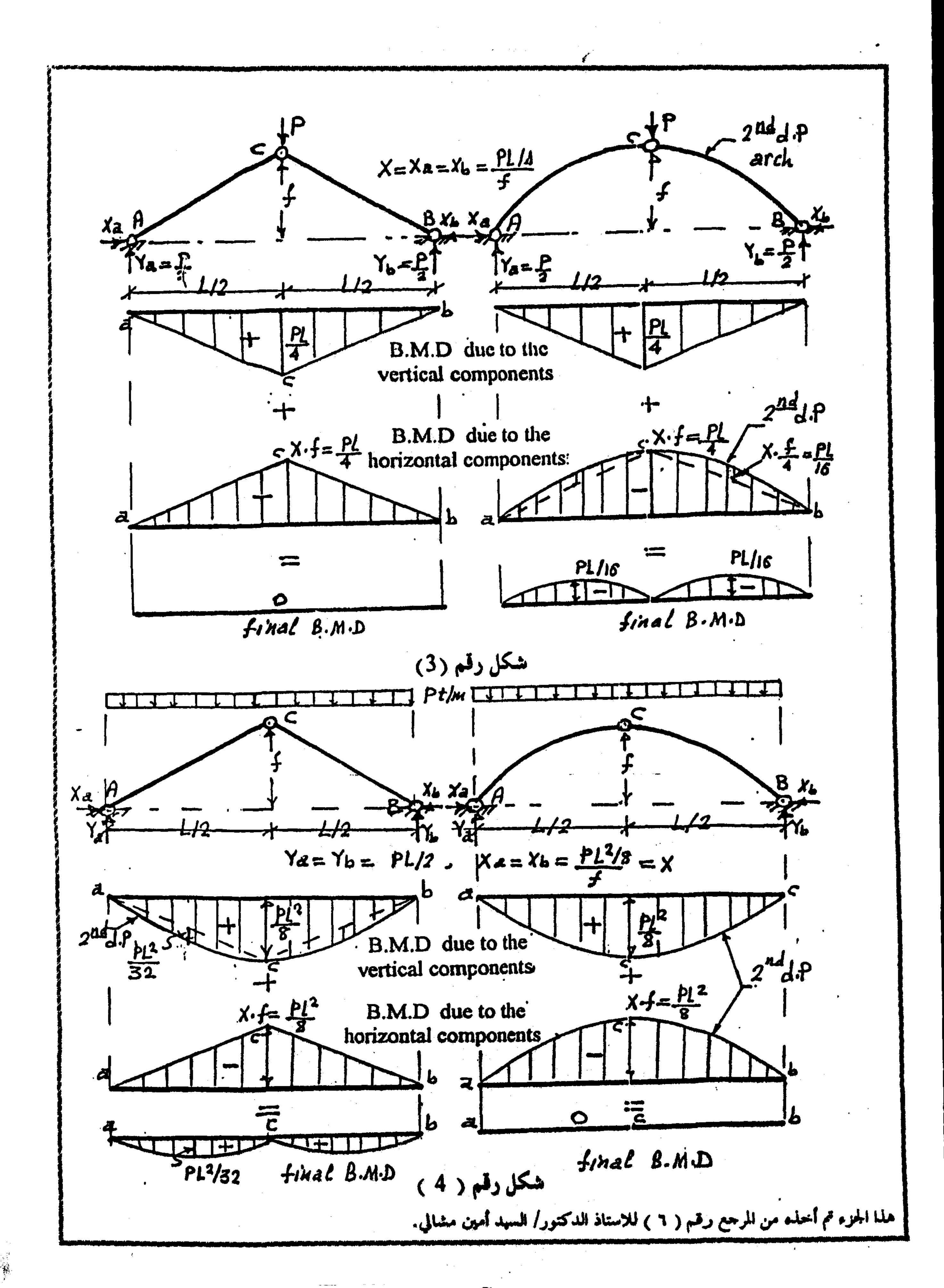


شكل رقم (1)



شكل رقم (2)

هذا الجزء تم أخذه من المرجع رقم (٦) للاستاذ الدكتور/ السيد أمين مشالي.



شكل رقم (3)

شكل رقم (4)

هذا الجزء تم أخذه من المرجع رقم (٦) للاستاذ الدكتور/ السيد أمين مشالي.

مثال (٦) :

للإطار العقدي المبين بالشكل رقم (5) أحسب ردود الأفعال وارسم شكل عزوم الانحناء. ثم أوجد القوي الداخلية عند القطاع(S – S).

الحل :

١- يتم إيجاد ردود الأفعال أولا كالأتي :

$\sum X=0.0$ So, $X_b=6.00$ ton

$\sum M@b=0.00$, $-8\times2-4\times9-6\times2+Y_a\times8=0.00$

So $Y_a=8.00$ ton

$\sum Y=0.0$, $-4-8+8+Y_b=0.00$ So, $Y_b=4.00$ ton

٢- يتم حساب قيم العزوم عند النقط لرسم شكل عزم الانحناء كالأتي :

$M_a=M_b=0.00$

$M_{d_{left}}=-4\times1=-4.00$ ton.m

$M_{d_{down}}=-6\times2=-12.00$ ton.m,

So $M_{d_{right}}=-16.00$ ton.m

$M_C=Y_b\times4-X_b\times f-8\times2=-12.00$ ton.m

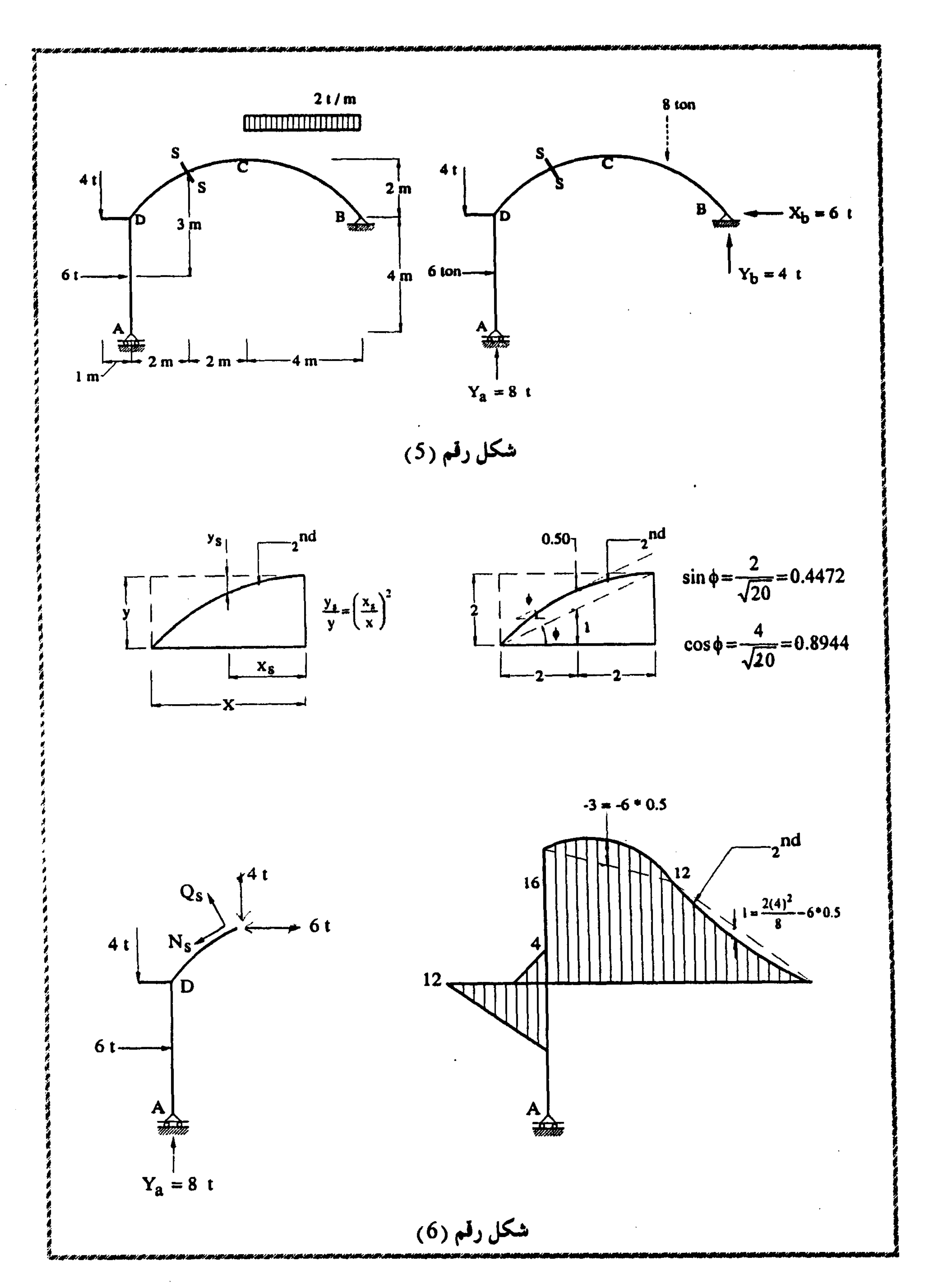
٣- حساب قيمة القوي الداخلية عند القطاع (S – S) :

$M_S=+8\times2-6\times3.5-4\times3=-17.00$ ton.m

يتم الحصول علي قيم القص والقوي العمودية عند القطاع (S – S) بدراسة اتزان الجزء الأيسر من المنشأ والتحليل عند القطاع للقوة الرأسية 4.00 ton لأعلي والأفقية 6.00 ton جهة اليمين كما هو موضح بالشكل رقم (6) .

$Q_S=4\cos\phi-6\sin\phi=1.0624$ ton ↑

$N_S=-4\sin\phi-6\cos\phi=7.1552$ ton comp.



شكل رقم (5)

شكل رقم (6)

مثال (٧) :

أحسب ردود الأفعال وارسم شكل عزوم الأنحناء للأطار العقدي المغلق والمبين بالشكل رقم (7).

الحل :

١- يتم إيجاد ردود الأفعال أولا كالأتي :

نعتبر ردود الأفعال الخارجية عند B , A هي :

$Y_a = 11.00$ ton , $Y_b = 13.00$ ton , $X_b = 2.00$ ton $\rightarrow$

ثم يتم حل الجزء CDE أولا ، حيث أنه أطار ذو ثلاث مفاصل محمل علي الجزء CABE وذلك علي النحو التالي :

$\Sigma M @ D = 0.00$, $8\times4+2\times10-Y_{eM}\times8=0.00$

$\Sigma M @ C = 0.00$, $2\times3+8\times4+2\times10-Y_e\times8-X_e\times3=0.0$

وبحل المعادلتين نجد أن :

$X_e = 2.00$ ton , $Y_e = 6.50$ ton

يتم حل الجزء الثاني CABE وذلك بعد عكس ردود الأفعال عند C, E في الجزء السفلي كما هو مبين بالشكل رقم (٧).

٢- يتم حساب قيم العزوم عند النقط لرسم شكل عزم الانحناء كالأتي :

$M_c = M_d = M_e = 0.00$

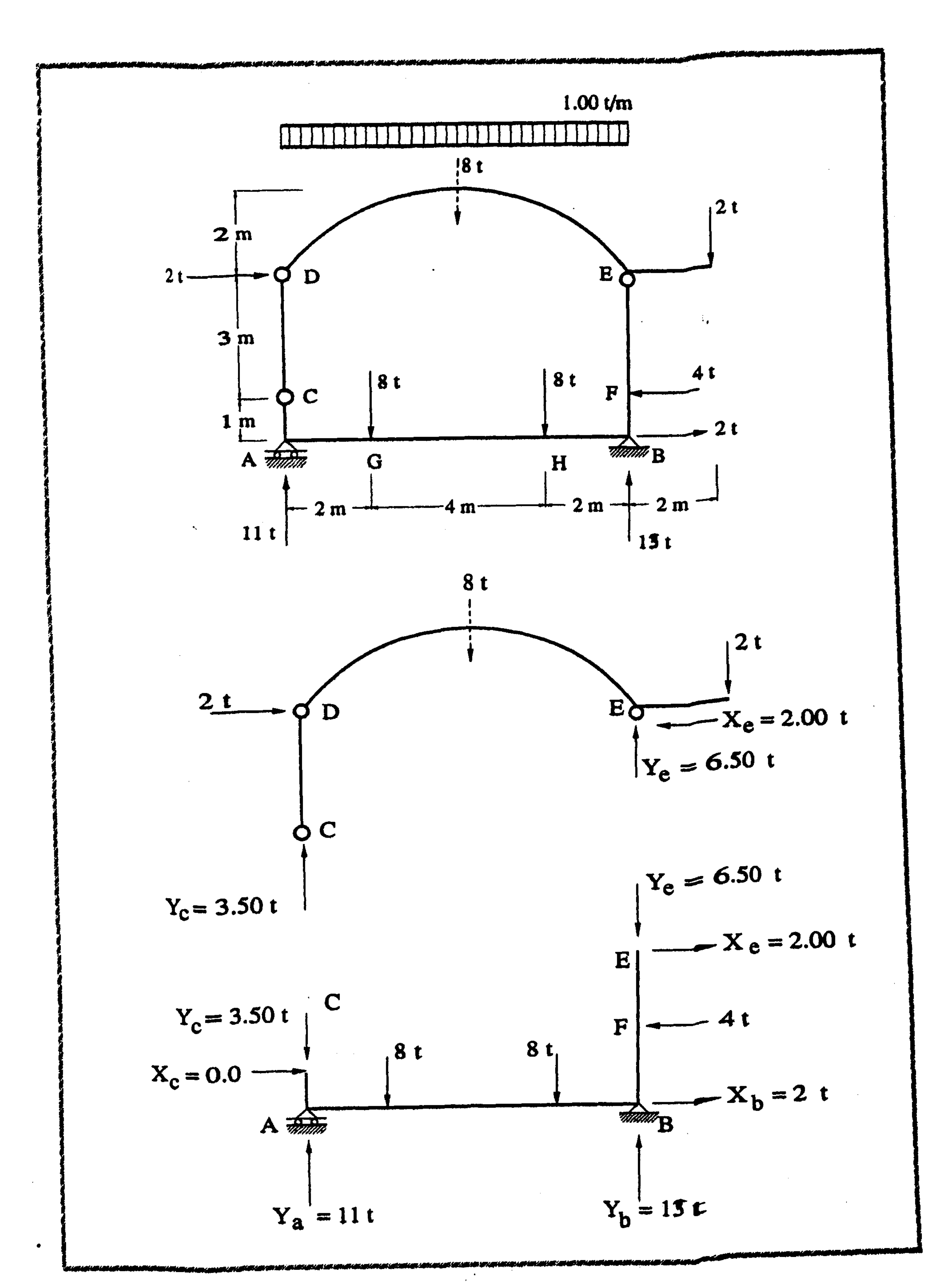
وذلك لأن قيمة العزم عند المفصل تساوي صفر.

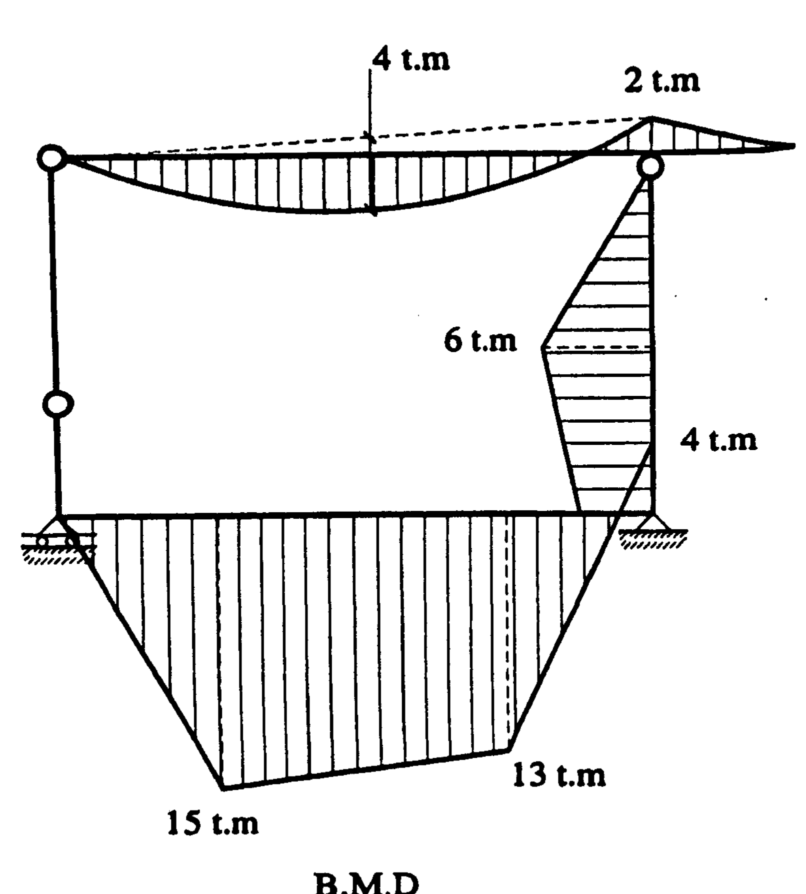
$M_a = 0.00$, $M_f = +2\times3. = 6.00$ ton.m

$M_b = +2\times4-4\times1 = +4.00$ ton.m

$M_g = (11-3.5)\times2 = 15.00$ ton.m,

$M_h = (11-3.5)\times6-8\times4 = 13.00$ ton.m


1.00 t/m
8 t
2 m
2 t
D
E
2 t
3 m
C
8 t
8 t
F
4 t
1 m
2 t
A
G
H
B
2 m
4 m
2 m
2 m
11 t
15 t
8 t
2 t
2 t
D
E
Xe = 2.00 t
Ye = 6.50 t
C
Yc = 3.50 t
Ye = 6.50 t
Xe = 2.00 t
E
C
Yc = 3.50 t
F
4 t
8 t
8 t
Xc = 0.0
Xb = 2 t
A
B
Ya = 11 t
Yb = 15 t



B.M.D

شكل رقم (7)



المحددة استاتيكيا

الفصل الخامس
مؤثرات الاجهاد الداخلى للشبكيات

تأليف

ا.د. ليلى الحفناوى ، د. جمال السعدى

الشبكيات (TRUSSES)

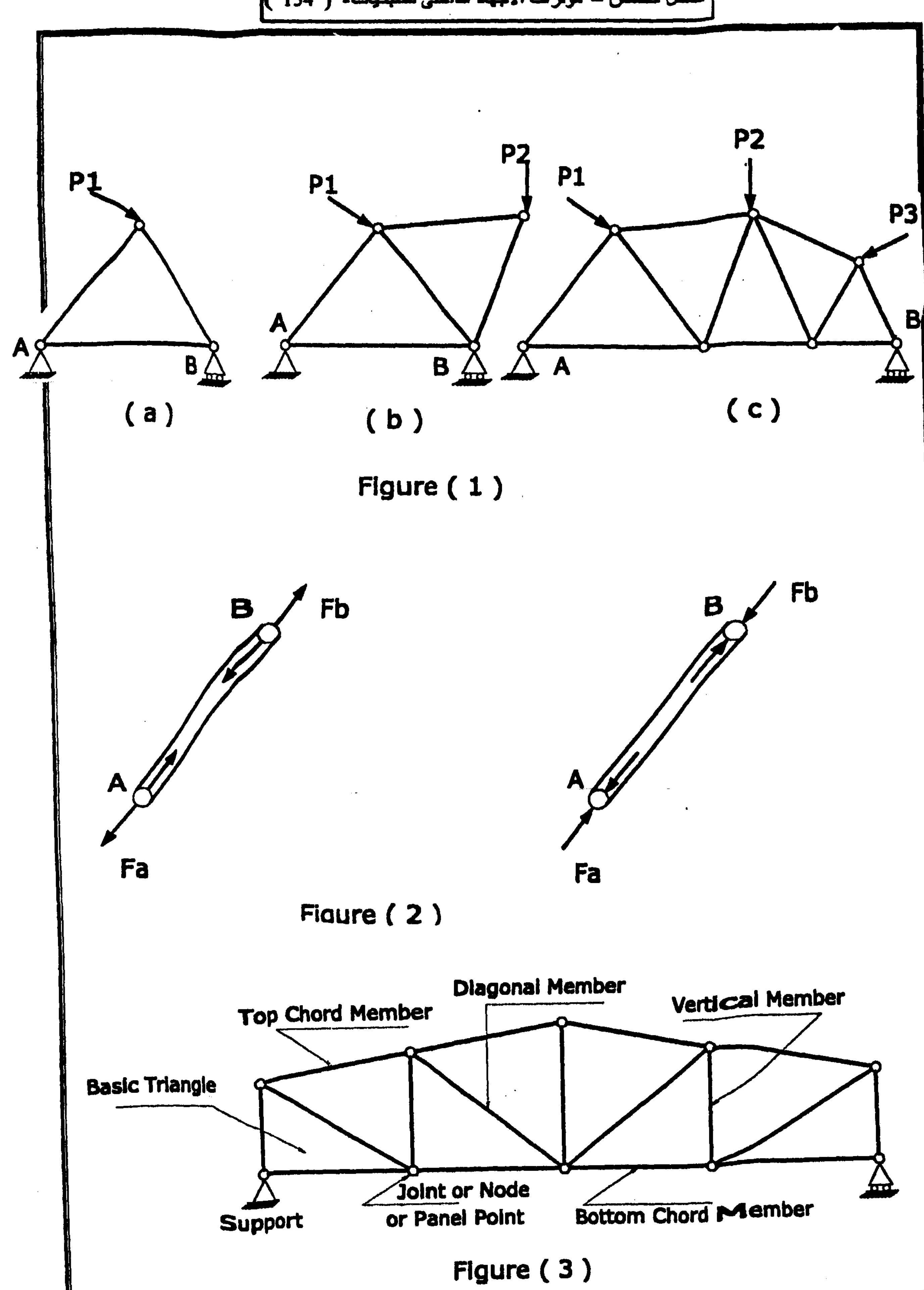
مقدمة

تعرف الشبكيات على أنها تلك المنشآت التى تتكون من مجموعة من القضبان المستقيمة التى تتصل ببعضها اتصالا مفصليا عند أطرافها ، وترتب هذه القضبان بطريقة ما بحيث تعطى منشأ متماسكا بحيث تتعرض أعضاؤه لقوى محورية فقط . وهناك نوعان من الشبكيات ؛ أولاهما يعرف بالشبكيات المستوية (Plane trusses) – وهى الشبكيات التى تقع جميع القضبان المكونة لها فى مستوى واحد – وثانيهما يعرف بالشبكيات الفراغية (Space trusses) – وهى الشبكيات التى لا تقع القضبان المكونة لها فى مستوى واحد . وسوف نقتصر فى هذا الفصل على النوع الأول وهو الشبكيات المستوية ، وأبسط تركيب شبكى مستوى هو مكون من ثلاثة قضبان على شكل مثلث وهذه القضبان متصلة مع بعضها البعض اتصالا مفصليا ، وهذا التركيب مرتكز على ركيزتين بسيطتين ، بحيث يكون فى النهاية منشأ متزنا (Stable structure) ويستطيع تحمل ما عليه من قوى ، أنظر شكل رقم (1 - a) . أى تركيب شبكى آخر ، ينتج من تكبير هذا النوع البسيط عن طريق زيادة عدد المثلثات عن طريق اضافة قضيبين متصلين فى نقطة لكل مثلث زيادة عن الشكل الأصلى ، انظر شكل رقم (1- b , 1 - c) .

لدراسة القوى الداخلية للشبكيات المستوية ، تؤخذ الفروض الأساسية التالية فى الاعتبار : -

١. القضبان المكونة للتركيب الشبكى تتصل ببعضها اتصالا مفصليا عند اطرافها بمفاصل مثالية – غير احتكاكية (Frictionless) – والمفاصل المثالية هى تلك المفاصل التى لايتولد عندها عزوم انحناء .
٢. الأحمال التى تتعرض لها الشبكيات وكذلك ردود الفعل الخارجية تؤثر فقط عند نقط اتصال القضبان (المفاصل المثالية) .
٣. القضبان المكونة للتركيب الشبكى كلها مستقيمة .

ونتيجة لهذه الفروض فان القضبان المكونة لأى تركيب شبكى تتعرض لقوى محورية فقط (Axial Forces) – أى لاتتولد قوى قص أو عزوم انحناء – وهذه القوى المحورية اما أن تكون قوى شد أو قوى ضغط . والشكل رقم (٢) يوضح أحد قضبان تركيب شبكى معين ، وهذا القضيب تم تحريره من باقى القضبان الأخرى المكونة للتركيب الشبكى ، وعليه القوى المؤثرة الناتجة من انفصاله عن بقية القضبان (Free body diagram) ، ونتيجة لأن نهايات القضيب مفصلية فان القوى المنتقلة عن طريق المفصل يمكن تمثيلها فقط بالمتجهين (F_A, F_B) حيث ($F_A = -F_B$) وذلك حتى يكون القضيب متزنا ، أى أن القوى عند نهايتى القضيب تكون متساوية فى القيمة ومتضادة فى الاتجاه ، وعلى ذلك فان أى قضيب من القضبان المكونة للتركيب الشبكى


P1
A
B
(a)
P1
P2
A
B
(b)
P1
P2
P3
A
B
(c)
Figure (1)
B
Fb
A
Fa
B
Fb
A
Fa
Fiaure (2)
Top Chord Member
Diagonal Member
Vertical Member
Basic Triangle
Support
Joint or Node
or Panel Point
Bottom Chord Member
Figure (3)

يتعرض لنوع واحد من القوى المحورية وهو اما شد أو ضغط كما هو موضح بالشكل رقم (٢) . وهذه القوى العمودية المحورية والمحسوبة طبقا للشروط السابقة تسمى القوى الأساسية (Primary Forces) ، وبالطبع فان الفروض المذكورة سابقا لايمكن تحقيقها فعليا تحقيقا كاملا ، لأن القضبان المكونة لأى تركيب شبكى تتعرض لأحمال موزعة بين أطرافها (مثل الوزن الذاتى لها) وكذلك ارتباطها ببعضها يكون عن طريق مسامير البرشام (Rivets) أو اللحام (Welding) وهذا الارتباط عادة يأخذ مساحة من هذه القضبان وتسمى هذه المساحة وصلة (Joint) وليست نقطة أو منصل مثالى وبالتالى تتولد عند هذه الوصلة قوى قص وعزوم انحناء –والاجهادات المتولدة عن هذه القوى والعزوم تسمى اجهادات ثانوية (Secondary Stresses) - وبالتالى تتغير القوى العمودية فى هذه القضبان ، وهذا التغير يمكن تجاهله فى التصميمات المبدئية . وعموما عند تصميم التركيبات الشبكية تؤخذ فى الاعتبار القوى الأساسية (Primary Forces) مع مراعاة تخفيض الاجهادات المسموح بها (Allowable Stresses) بما يكفى لمواجهة الاجهادات الثانوية (Secondary Stresses) . وسوف تقتصر دراستنا فى هذا الجزء على الشبكيات المثالية ، وبالتالى سوف نأخذ القوى الأساسية فقط لأن القوى والعزوم الثانوية وبالتالى الاجهادات الثانوية سوف تتلاشى . ومن الآن فصاعدا سوف نستخدم مصطلح الأعضاء (Members) بدلا من القضبان والعضو (Member) بدلا من القضيب ، فسوف نقول الأعضاء المكونة للتركيب الشبكى بدلا من القضبان المكونة للتركيب الشبكى ، ونقول عضو فى التركيب الشبكى بدلا من قضيب فى التركيب الشبكى وذلك تمشيا مع معظم المراجع .

تعاريف (Notation)

يبين شكل رقم (٣) تركيب شبكى بسيط (Simple Truss) ، وفيما يلى التعريفات المختلفة لكل جزء من أجزائه : -

- عضو الوتر العلوى (Top Chord Member)
- عضو الوتر السفلى (Bottom Chord Member)
- عضو قطرى (Diagonal Member)
- عضو رأسى (Vertical Member)

كما يطلق على كل من العضو القطرى والعضو الرأسى ، الأعضاء الجزعية (Web Members)

- نقطة الاتصال بين الأعضاء (Joint , Node , or Panel Point) .

بالرجوع الى شكل رقم (٣) ، نلاحظ أننا رسمنا نقط الاتصال بين الأعضاء بشكلها المثالى وهى المفاصل غير أننا من الآن فصاعدا سوف لا نرسم هذه المفاصل وسوف يتم الاستعاضة عنها بنقط اتصال الأعضاء فقط وذلك تمشيا مع معظم المراجع وكذلك للسهولة .

العلاقة بين عدد أعضاء التركيب الشبكى وعدد نقط الاتصال بين هذه الأعضاء

Relation between the number of truss-members and the number of its joints

لكى يتولد تركيب شبكى متزن (Stable) ومحدد استاتيكيا (Statically determinate) ، أو بمعنى آخر متماسك وغير قابل للانهيار أو التصدع فى أى جزء من أجزائه فلا بد من توافر الشروط الآتية :-

1. أن يكون وضع الركائز الخارجية بحيث تكون ردود الفعل الثلاثة المتولدة غير ملتقية فى نقطة وغير متوازية (راجع الفصل الأول) .
2. عدد المعادلات التى يمكن كتابتها للتركيب الشبكى = عدد المجاهيل

فبالنسبة للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (٣) ، نلاحظ أن عدد المعادلات التى يمكن كتابتها تساوى عدد نقط الاتصال مضروبة فى ٢ ، وعدد المجاهيل تساوى عدد أعضاء التركيب الشبكى مضافا اليه عدد ردود الفعل الخارجية وهى ثلاثة ، كما هو موضح من المعادلة الآتية : -

$$m + r = 2j \quad \text{or} \quad m + 3 = 2j$$

حيث

(m) = عدد أعضاء التركيب الشبكى

(r) = عدد ردود الفعل الخارجية = ٣

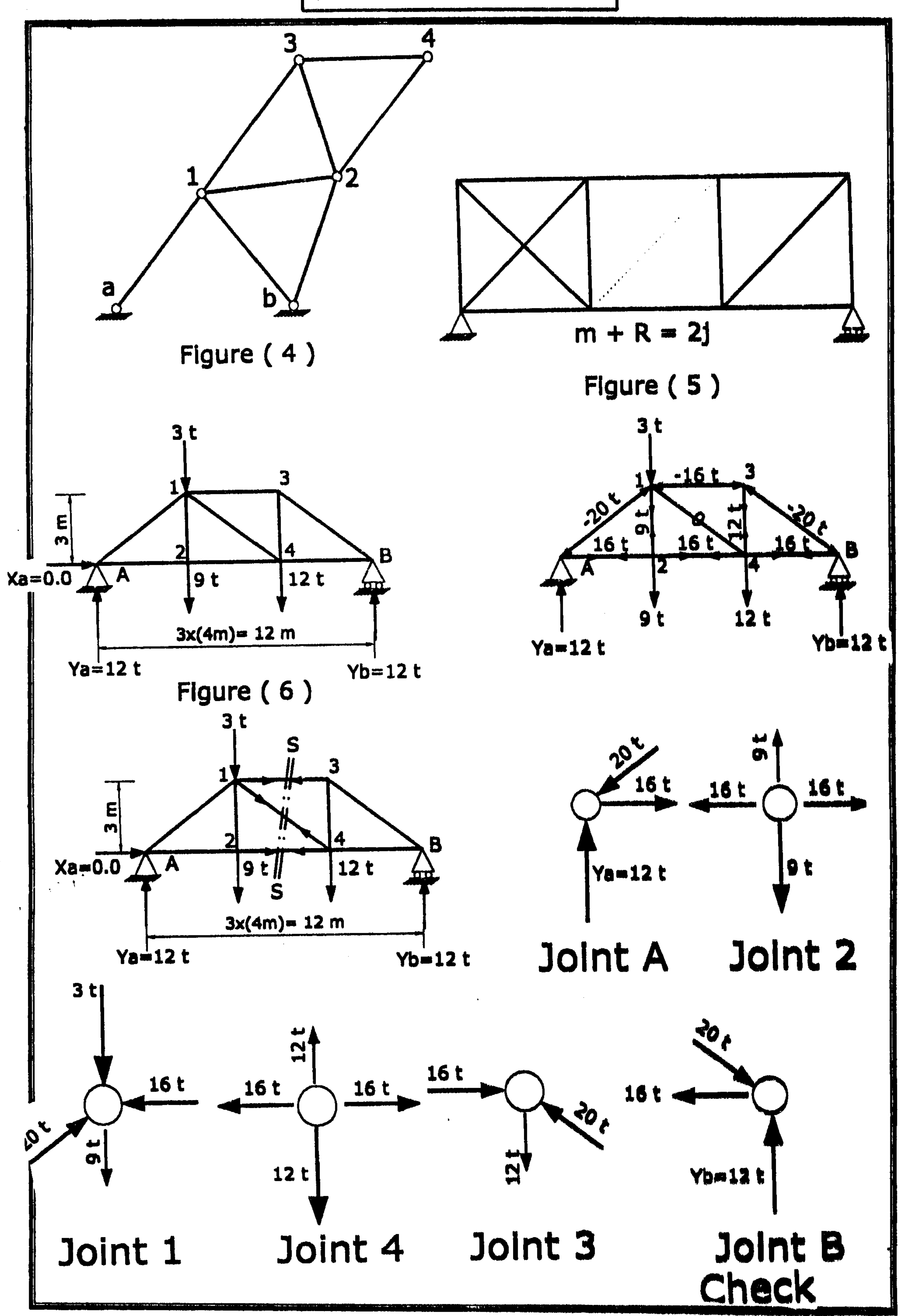
(j) = عدد نقط الاتصال بين الأعضاء

والمعادلة السابقة صالحة لجميع التركيبات الشبكية والتى يبدأ تكوينها بثلاثة أضلاع على شكل مثلث أساسى ثم ينمو التركيب الشبكى بعد ذلك باضافة ضلعين لكل نقطة ، ولكن فى بعض التركيبات الشبكية والتى يبدأ تكوينها بمفصلين خارجيين وضلعين ثم ينمو التركيب الشبكى بعد ذلك باضافة ضلعين لكل نقطة ، فان العلاقة بين عدد الأعضاء المكونة لهذا التركيب الشبكى ونقط الاتصال تصبح : -

$$m = 2j$$

وفى هذه الحالة لايدخل المفصلين الخارجيين ضمن عدد نقط الاتصال ، وهذا النوع من التركيبات الشبكية متزن ومتماسك ولايحتاج الى ركائز اضافية ، انظر شكل رقم (٤) .

وجدير بالذكر أن العلاقتين السابقتين بين عدد الأعضاء ونقط الاتصال ليستا كافيتين لاثبات أن تركيبا شبكيا معينا يكون متماسكا وكذلك محددا استاتيكيا ، اذ قد تكون العلاقة بين عدد الأعضاء ونقط الاتصال صحيحة ولكن يكون التركيب الشبكى منهارا فى جزء من أجزائه وغير محددا استاتيكيا فى جزء آخر ؛ وذلك بنقل عضو من أعضاء التركيب الشبكى من جزء (ليصبح هذا الجزء منهارا لنقص ضلع فيه) الى جزء آخر (



3
4
1
2
a
b
Figure (4)
m + R = 2j
Figure (5)
3 t
1
3
3 m
2
4
B
Xa=0.0
A
9 t
12 t
3x(4m)= 12 m
Ya=12 t
Yb=12 t
Figure (6)
-16 t
-20 t
9 t
0
12 t
16 t
Ya=12 t
Yb=12 t
S
Joint A
Joint 2
Joint 1
Joint 4
Joint 3
Joint B
Check

ليصبح هذا الجزء الأخير غير محددا استاتيكيا وذلك لوجود ضلع زائد فيه) ، أنظر شكل رقم (٥) . أما اذا زاد عدد الأعضاء عن العدد المحدد من العلاقتين السابقين ، فان التركيب الشبكى فى هذه الحالة يكون غير محددا استاتيكيا (Statically Indeterminate Truss) من درجة تساوى عدد الأعضاء الزائدة . واذا نقص عدد الأعضاء عن العدد المحدد من العلاقتين السابقتين ، فان التركيب الشبكى فى هذه الحالة يصبح منهارا أو متصدعا فى بعض أجزائه .

تحليل التركيبات الشبكية البسيطة (Analysis of Simple Trusses)

توجد طريقتان لحساب القوى الداخلية فى أعضاء التركيبات الشبكية المثالية وهما : -

١. الطريقة الحسابية (Analytical Method) وهذه الطريقة بدورها تنقسم الى طريقتين وهما : -
   - طريقة اتزان نقط الاتصال (Method of Joints)
   - طريقة اتزان القطاعات (Method of Sections)

٢. الطريقة البيانية (Graphical Method) وهذه الطريقة سوف يتم دراستها فى آخر هذا الفصل .

أولا : الطريقة الحسابية (Analytical Method)

لدراسة الطريقة الحسابية نعتبر التركيب الشبكى البسيط الموضح بالشكل رقم (٦) ، وكما أسلفنا فى الفصول السابقة لابد من ايجاد ردود الأفعال الخارجية أولا وذلك من دراسة اتزان التركيب الشبكى وتطبيق شروط الاتزان المعروفة (مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الرأسى = صفر ، ومجموع مركبات القوى فى الاتجاه الأفقى = صفر ، ومجموع عزوم جميع القوى حول نقطة معينة = صفر ، أو مجموع عزوم جميع القوى حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة = صفر ؛ انظر الفصل الأول) وعلى هذا تكون ردود الفعل الخارجية لهذا التركيب الشبكى هى : -

$Xa = 0.0$, $Ya = Yb = 12$ ton

١. طريقة اتزان نقط الاتصال (Method of Joints)

نطبق معادلتى الاتزان (مجموع مركبات القوى الأفقية = صفر ، و مجموع مركبات للقوى الراسية = صفر) عند كل نقطة اتصال (مفصل) ، ونبدأ من جزء فى التركيب الشبكى بحيث لايزيد عدد المجاهيل عند كل نقطة اتصال عن اثنين . فى هذا المثال نبدأ الاتزان من الركيزة (A) فى الطرف الأيسر من التركيب الشبكى ، ثم نبدأ بقطع الضلعين حول المفصل (A) ، أو نكون ما يسمى بشكل الجزء الحر (Free Body Diagram) ، ثم نطبق شرطى الاتزان ($\Sigma X=0.0$, $\Sigma Y=0.0$)

لايجاد القوى فى الضلعين حول الركيزة (A) كما هو موضح بالشكل رقم (٦) . ثم ننتقل بعد ذلك الى الوصلة عند نقطة (٢) ونطبق شرطى الاتزان السابقين لنوجد القوى فى الضلعين (١-٢ و ٢-٤) ، ثم ننتقل الى الوصلة عند النقطة (١) ، ثم الصلة (٣) ، ثم الصلة (٤) ، وأخيرا الوصلة عند (B) مع ملاحظة أننا لسنا فى حاجة الى دراسة اتزان الوصلة عند (B) وذلك لأن القوى فى جميع الأعضاء الملتقية عند هذه الوصلة أصبحت معلومة ، ولكن الغرض من دراسة اتزان هذه الوصلة هو للتحقق من صحة النتائج (Check) ، فاذا وجدنا أن مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور (X) = صفر ، وكذلك مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور (Y) = صفر ؛ دل ذلك على صحة النتائج والعكس صحيح أنظر شكل رقم (٦) .

<u>ملاحظات</u>

- الأسهم المبينة عند كل نقطة اتصال للأعضاء (مفصل) تمثل اتجاه القوى فى الأعضاء وتأثيرها على المفصل و ليس تأثير المفصل على الأعضاء .
- تكون القوة فى العضو قوة شد اذا كانت تتجه بعيدة عن المفصل (Outward) .
- تكون القوة فى العضو قوة ضغط اذا كانت تتجه نحو المفصل (Inward) .
- يتم وضع العلامة الموجبة فى حالة قوة الشد ، وتوضع العلامة السالبة فى حالة قوة الضغط ، كما يمكن التمييز بين الأعضاء المعرضة لقوى ضغط بخطوط سميكة نسبيا بالمقارنة بالأعضاء المعرضة لقوى شد ، وذلك للدلالة على أن الأعضاء المعرضة لقوى ضغط تحتاج الى احتياطات خاصة عند تصميمها لتعرضها للانبعاج الجانبى (Lateral Buckling) .

٢. طريقة اتزان القطاع (Method of Section)

عندما يكون المطلوب هو حساب القوى فى بعض الأعضاء فقط وليس كلها ، أو عندما تكون طريقة اتزان نقط الاتصال أقل ملاءمة لحساب القوى الداخلية فى أعضاء الجمالون (التركيب الشبكى) عندئذ يكون من الملائم استخدام طريقة اتزان القطاع . وهذه الطريقة تعتمد على عزل جزء من التركيب الشبكى عن طريق قطع أعضاء معينة ، ومن ثم حساب القوى فى هذه الأعضاء وذلك بدراسة اتزان الجزء المعزول من التركيب الشبكى .

<u>مثال</u> : لحساب القوى الداخلية فى الأعضاء (١-٣ ، ١-٤ ، ٢-٤) فى التركيب الشبكى السابق والموضح بالشكل رقم (٦) ، نفترض أننا مررنا قطاع (S-S) خلال هذه الأضلاع الثلاثة ، ثم ندرس اتزان أى من جزءى التركيب الشبكى باعتباره جسم حر (Free body diagram) . نفترض أن القوى غير المعلومة فى الأعضاء المقطوعة هى شد ، وبعد دراسة الاتزان اذا كانت النتيجة موجبة فهذا يعنى أن الفرض صحيح (شد Tension) واذا كانت النتيجة سالبة دل ذلك على أن الفرض غير صحيح وأن

القوة فى هذا العضو هى قوة ضغط (Compression) . ومن الملاحظ أنه فى حالة استخدام طريقة اتزان القطاع يتم تطبيق شروط الاتزان الثلاثة ($\Sigma X=0.0$, $\Sigma Y=0.0$, & $\Sigma M=0.0$) أو أخذ مجموع عزوم الانحناء حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ومساواته بالصفر لأحد جزءى التركيب الشبكى وذلك بعكس طريقة اتزان الوصلات فانه يتم تطبيق شرطين فقط من شروط الاتزان وهما ($\Sigma X=0.0$, $\Sigma Y=0.0$) . وفى هذا المثال يمكن الحصول على القوة فى العضو (١- ٣) ؛ F_{1-3} ؛ بأخذ العزوم حول نقطة (٤) التى تسمى فى هذه الحالة قطب (Pole) ، وللحصول على القوة فى العضو (١ – ٤) ؛ F_{1-4} ؛ يمكن اعتبار معادلة الاتزان ($\Sigma Y=0.0$) أى مجموع القوى الرأسية للجزء تحت الدراسة = صفر ، وأخيرا للحصول على القوة فى العضو (٢ – ٤) ؛ F_{2-4} ؛ فانه يمكن ايجادها باستخدام معادلة الاتزان ($\Sigma X=0.0$) أى مجموع القوى الأفقية للجزء تحت الدراسة = صفر ، أو بأخذ عزوم الانحناء حول نقطة (1) وهو الأفضل فى مثل هذه الحالة ، وذلك لأن استخدام شرط مجموع القوى الأفقية يعتمد على قيمة القوة فى العضوين (١-٣ ، ١-٤) وبالتالى فانه اذا كان هناك خطأ فى حساب القوة فى أحد العضوين أو كلاهما ، فان قيمة القوة فى العضو ٢-٤ هى الأخرى خطأ . وعلى ذلك وباعتبار اتزان الجزء الأيسر تكون خطوات الحل كما يلى : -

- ΣM @ 4 = 0.0 i.e. $12*8 - 12*4 + F_{1-3}*3 = 0.0$, or $F_{1-3}=-16$ ton (Comp.).
- ΣM @ 1 = 0.0 i.e. $12*4 - F_{2-4}*3 = 0.0$, or $F_{2-4} = +16$ ton (Tension).
- $\Sigma Y = 0.0$ i.e. $12 - 9 - 3 - F_{1-4} / \cos\alpha = 0.0$, or $F_{1-4} = 0.0$.

ملحوظة : يمكن استخدام طريقتى اتزان القطاع واتزان نقط الاتصال معا فى حساب القوى الداخلية لأعضاء التركيب الشبكى .

مثال ١

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (٧) ، المطلوب ايجاد القوى فى جميع أعضاء التركيب الشبكى وذلك بالطريقة الحسابية .

الحل

بتطبيق شروط الاتزان الثلاثة نوجد ردود الأفعال الخارجية وهى كالآتى : -

Xa = 24 ton , Xb = 24 ton , & Yb = 6 ton.

نلاحظ أنه فى حالة تلاقى ثلاثة أعضاءٍ فى نقطة اتصال واحدة وأن هذه الوصلة غير محملة (Unloaded Joint) وأن هناك عضوان على استقامة واحدة (Collinear) ، فان القوة فى العضو الثالث تساوى صفر . وعلى ذلك تكون خطوات الحل كما يأتى : -

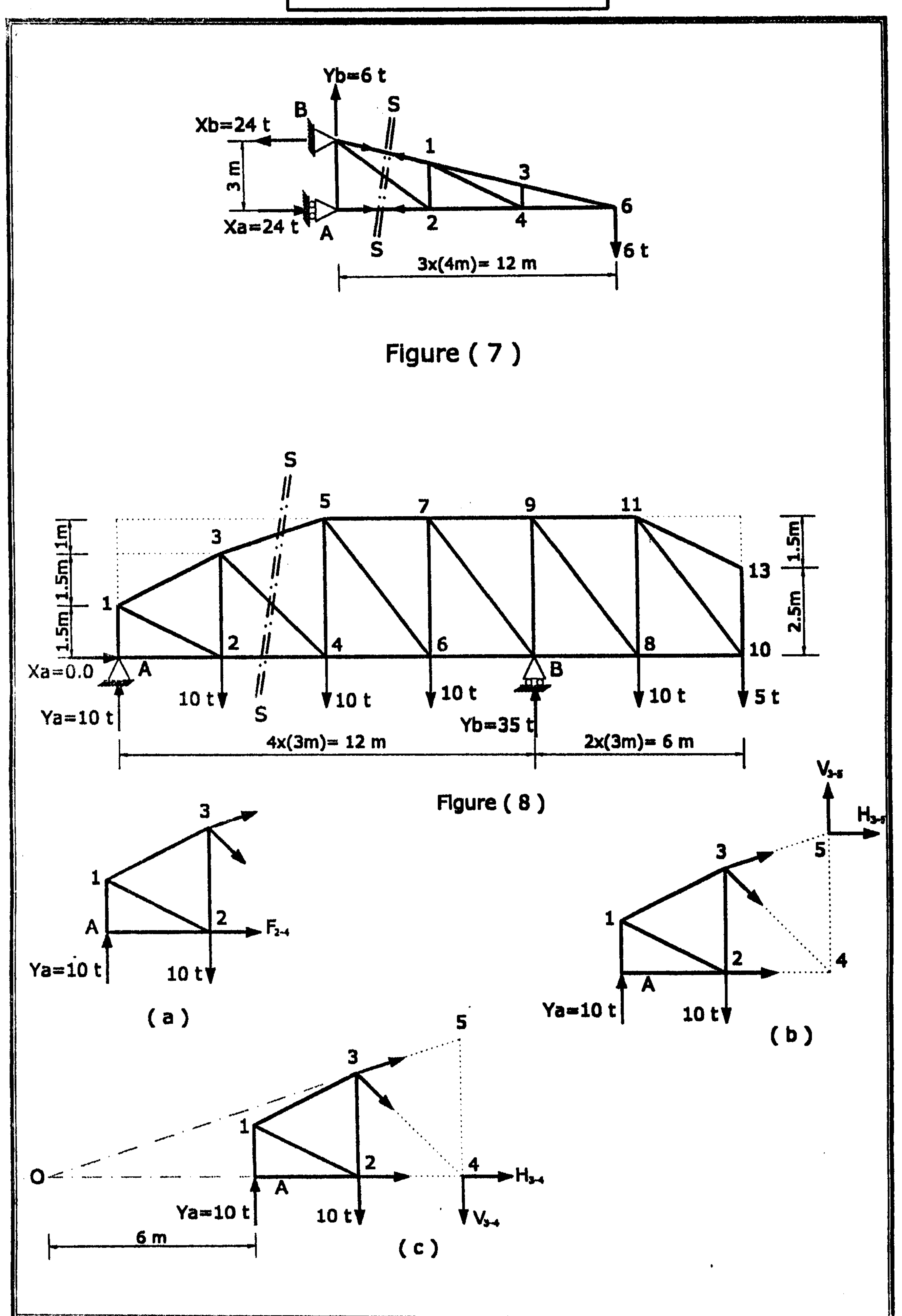


Figure (7)

Figure (8)

(a)

(b)

(c)

١. باعتبار اتزان الوصلة ٣ ، تكون القوة فى العضو (٣ – ٤) تساوى صفر ، أو ($F_{3-4} = 0.0$) .

٢. باعتبار اتزان الوصلة ٤ ، تكون القوة فى العضو (١ – ٤) تساوى صفر ، أو ($F_{1-4} = 0.0$) .

٣. باعتبار اتزان الوصلة ١ ، تكون القوة فى العضو (١ – ٢) تساوى صفر ، أو ($F_{1-2} = 0.0$) .

٤. باعتبار اتزان الوصلة ٢ ، تكون القوة فى العضو (٢ – B) تساوى صفر ، أو ($F_{2-B} = 0.0$) .

٥. باعتبار اتزان الوصلة (A) ، وأخذ مجموع القوى فى الاتجاه الراسى نجد أن القوة فى العضو (A-B) تساوى صفر ، أو ($F_{A-B} = 0.0$) .

٦. باعتبار القطاع (S-S) ، وبأخذ العزوم حول الركيزة (B) ، يمكن ايجاد القوة فى الضلع (A-2)

$\Sigma M @ B = 0.0$ i.e. $24*3 + F_{A-2}*3 = 0.0$, or $F_{A-2} = -24$ ton (Compression).

٧. وباعتبار نفس القطاع السابق ، وبأخذ العزوم حول الوصلة (٢) ، يمكن ايجاد القوة فى الضلع (B-1)

$\Sigma M @ 2 = 0.0$ i.e. $-6*4 + 24*3 - F_{B-1}*2*(4/4.125) = 0.0$, or $F_{B-1} = 24.75$ ton (Tension).

٨. وباستخدام القاعدة سابقة الذكر والخاصة بالوصلة غير المحملة ، يمكن ايجاد القوى فى بقية أعضاء التركيب الشبكى وذلك كما يلى : -

$F_{3-6} = F_{1-3} = F_{B-1} = 24.75$ ton (Tension).

$F_{4-6} = F_{2-4} = F_{A-2} = 24$ ton (Compression).

<u>مثال ٢</u>

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (٨) ، المطلوب ايجاد القوى فى الأعضاء (٢-٤ ، ٣-٤ ، و ٣-٥) ، وذلك باستخدام الطريقة التحليلية (الحسابية) .

الحل

بدراسة المنشأ ككل ، وبتطبيق معادلات الاتزان المعروفة ، يمكن ايجاد ردود الأفعال الخارجية وهى على النحو التالى : -

$X_a = 0.0$, $Y_a = 10$ ton , & $Y_b = 35$ ton.

بعد حساب ردود الأفعال الخارجية ، يتم حساب القوى فى الأعضاء المطلوبة وذلك باعتبار القطاع (S-S) والذى يقطع الأعضاء المطلوب حساب القوى فيها ، ثم يتم دراسة أى من الجزءين الأيمن أو الأيسر ومن المفضل أن ندرس الجزء الذى يحتوى على عدد أعضاء أقل وذلك لسهولة التحليل وتجنب الأخطاء الناتجة من الحسابات الكثيرة ، فى هذا المثال سوف يتم دراسة وتحليل الجزء الأيسر كجزء حر (Free body diagram)

) - لاحتوائه على عدد من الأعضاء أقل بكثير من الجزء الأيمن – وفيما يلى خطوات حساب القوى الداخلية فى الأعضاء المطلوبة : -

١. لحساب القوة فى العضو ٢-٤ ، نأخذ العزوم حول نقطة ٣ كما يلى :

ΣM @ 3 = 0.0 i.e. $F_{2\text{-}4} = 10*3/3 = 10$ ton (Tension).

٢. لحساب القوة فى العضو ٣-٥ ، نأخذ العزوم حول نقطة ٤ ، ونظرا لأن العضو ٣-٥ مائلا فانه يفضل تحليل القوة فى هذا العضو الى مركبتين احداهما أفقية ($H_{3\text{-}5}$) والأخرى رأسية ($V_{3\text{-}5}$) وذلك عند نقطة الاتصال ٥ ، كما هو مبين بالشكل وبالتالى نوجد المركبة الأفقية أولا ثم بعد ذلك نوجد القوة المطلوبة وذلك كما يلى :

ΣM @ 4 = 0.0 i.e. $H_{3\text{-}5} = (- 10*6 + 10*3)/4 = -7.5$ ton (Compression).

Thus, $F_{3\text{-}5} = (- 10^{1/2} / 3) * 7.5 = - 7.906$ ton (Compression).

٣. وبنفس الطريقة يتم حساب القوة فى العضو ٣-٤ ، وذلك بتحليل القوة ($F_{3\text{-}4}$) الى مركبة أفقية ($H_{3\text{-}4}$) وأخرى رأسية ($V_{3\text{-}4}$) وذلك عند نقطة الاتصال ٤ ، ثم بعد ذلك نأخذ العزوم حول القطب (O) - نقطة تلاقى امتداد كلا من العضوين ٢-٤ ، ٣-٥ – ومن هندسة الشكل نجد أن القطب (O) يبعد عن الركيزة (A) بمقدار ٦ متر ، وفيما يلى طريقة حساب القوة ($F_{3\text{-}4}$) :

ΣM @ O = 0.0 i.e. $10*6 - 10*9 - V_{3\text{-}4}*12 = 0.0$, or $V_{3\text{-}4} = - 2.5$ ton.

But, $F_{3\text{-}4} = -2.5 * (2^{1/2}) = - 3.536$ ton (Compression).

ملاحظات

- فى حالة حساب القوى فى الأعضاء القطرية ، وفى حالة توازى الوترين العلوى والسفلى لايمكن استخدام طريقة العزوم وذلك لاستحالة تلاقى الوترين العلوى والسفلى فى نقطة وفى هذه الحالة نستخدم طريقة اتزان القص (Method of Shear) .
- فى حالة حساب القوى فى أعضاء الوترين العلوى والسفلى ، غالبا نستخدم طريقة العزوم وذلك فى حالة تلاقى جميع الأعضاء المقطوعة بواسطة القطاع ما عدا العضو المراد حساب القوة فيه .
- فى حالة زيادة الأعضاء غير الملتقية فى نقطة واحدة عن واحد يجب ايجاد القوى فى الأعضاء الزائدة عن العضو المراد ايجاد القوة فيه وذلك بأى طريقة ثم بعد ذلك أخذ العزوم حول نقطة تلاقى بقية الأعضاء ، ومن ثم نوجد القوة فى العضو المطلوب ، وسوف يتضح ذلك من الأمثلة التالية .

مثال ٣

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (٩) ، المطلوب ايجاد القوى فى الأعضاء المؤشر عليها بالعلامة (/) .

الحل

يتم دراسة التركيب الشبكى ككل وتطبيق شروط الاتزان المعروفة ، ومن ثم ايجاد ردود الفعل الخارجية وهى كما يلى : -

$X_a = 0.0$, $Y_a = 6$ ton , $Y_b = 5$ ton.

لحساب القوى الداخلية فى الضلعين ٣-٥ ، ٤-٦ ؛ نعتبر القطاع (S-S) الموضح بالشكل رقم (٩) ونلاحظ أن هذا القطاع قطع أربعة أعضاء . بدراسة الجزء الأيسر من هذا القطاع واعتباره جزء حر الحركة (Free body diagram) ، ثم نأخذ العزوم حول نقطة ٣ وذلك لحساب القوة فى العضو ٤-٦ كما يلى :

$F_{4\text{-}6} = 6*8/6 = 8$ ton (Tension).

وكذلك لايجاد القوة فى العضو ٣-٥ نأخذ العزوم حول نقطة الاتصال ٤ كما يلى :

$F_{3\text{-}5} = -\,6*8/6 = -\,8$ ton (Compression).

كما يمكن التحقق من صحة هذه النتائج باختبار مجموع القوى الأفقية للجزء على يسار القطاع كما يلى :

Check : $\Sigma X = 8 - 8 = 0.0 \;\therefore$ O.K.

للحصول على القوى فى العضوين ٥-١٤ ، ٦-١٤ ؛ يتم دراسة نقطة الاتصال ١٤ فى هذه النقطة يلتقى أربعة أعضاء اثنان منهما راسيان واثنان مائلان كما هو موضح بالشكل وبتطبيق الشرط الخاص بمجموع مركبات القوى الأفقية نلاحظ أن المركبة الأفقية للقوة فى أحد العضوين لابد وأن تكون عكس اتجاه المركبة الأفقية للقوة فى العضو الآخر - وهاتان القوتان متساويتان فى القيمة - مما يعنى أنه اذا كانت القوة فى أحد العضوين قوة شد فان القوة فى العضو الآخر هى قوة ضغط ، ونظرا لأن ميل هذين العضوين متساوى فان المركبتين الراسيتين تكونان متساويتان وبامرار قطاع راسى خلال الأعضاء ٣-٥ ، ٥-١٤ ، ٦-١٤ ، ٤-٦ وبدراسة اتزان الجزء الأيسر من هذا التركيب الشبكى كجسم حر (Free body diagram) وتطبيق شرط مجموع مركبات القوى الراسية نوجد المركبة الراسية فى كلا العضوين ٥-١٤ ، ٦-١٤ ومن ثم ايجاد القوى فيهما وذلك كما يلى :

$\Sigma Y = 0.0$, i.e. $6 - 3 - V_{5\text{-}14} - V_{6\text{-}14} = 0.0$, but $V_{5\text{-}14} = V_{6\text{-}14}$, $\therefore\; V_{5\text{-}14} = V_{6\text{-}14} = 1.5$ ton.

$\therefore\; F_{5\text{-}14} = F_{6\text{-}14} = 1.5*(\,5/3\,) = +\,2.5$ ton.

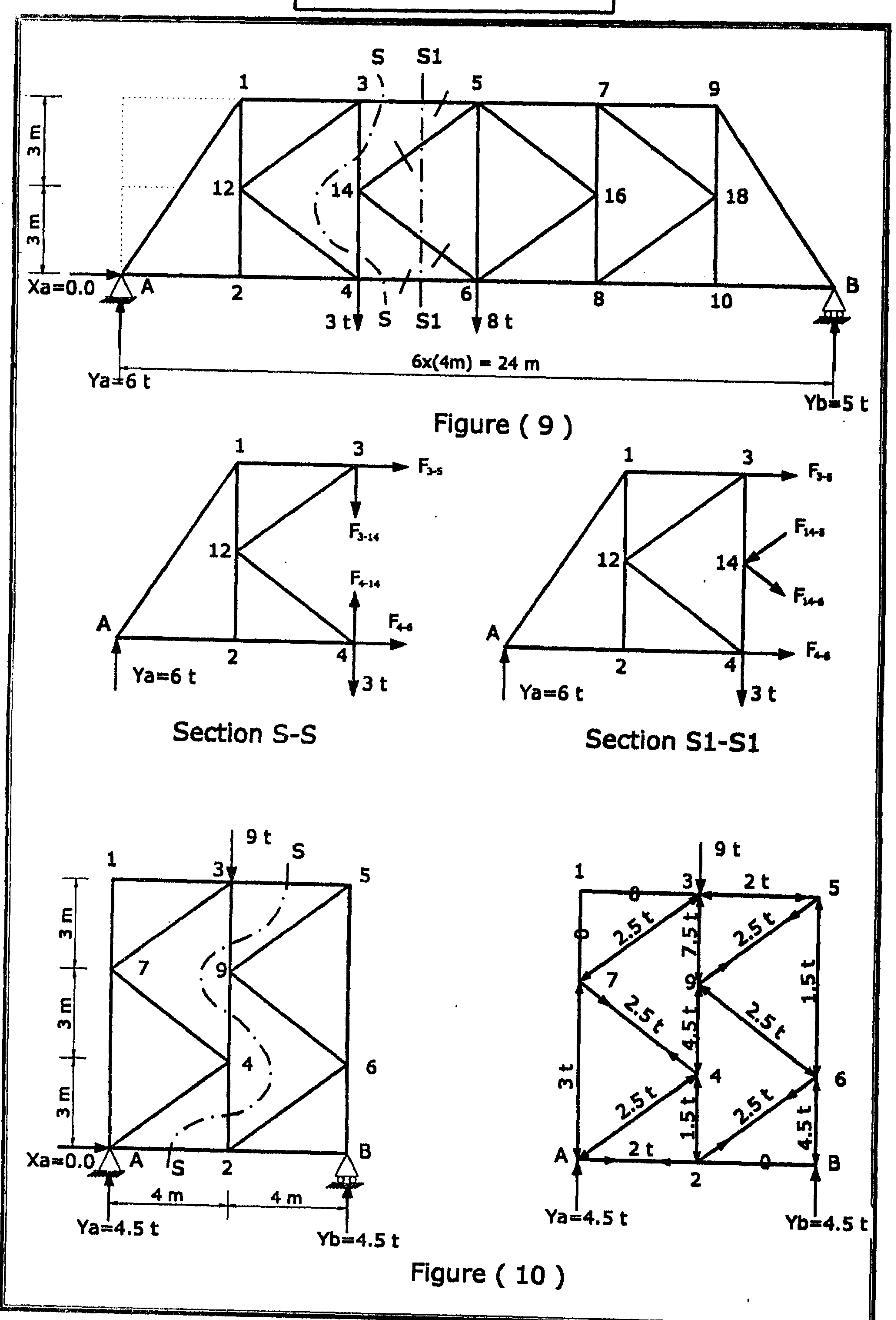


Figure (9)

Figure (10)

والاشارة الموجبة تعنى الاتجاهات المفروضة صحيحة وعليه فان القوة فى العضو ٥-١٤ هى قوة ضغط ، بينما القوة فى العضو ٦-١٤ هى قوة شد .

من الملاحظ فى هذا المثال أننا استخدمنا طريقتى اتزان القطاع واتزان نقط الاتصال بالتبادل وتسمى هذه الطريقة بالطريقة المختلطة (Mixed Method) .

مثال ٤ : (على الطريقة المختلطة : Mixed Method)

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (١٠) ، أوجد القوى الداخلية فى جميع أعضاء هذا التركيب الشبكى .

الحل

نوجد أولا ردود الفعل الخارجية - وذلك بتطبيق شروط الاتزان المعروفة – وهى ($Ya = Yb = 4.5$ ton , $Xb = 0.0$) ، ثم بعد ذلك نتابع خطوات الحل كما يلى :

- بدراسة اتزان نقطة الاتصال ١ (Joint 1) .

$F_{1-3} = F_{1-7} = 0.0$

- بدراسة اتزان النقطة B .

$F_{2-B} = 0.0$, $F_{6-B} = 4.5$ ton (Compression).

- بعد ذلك نجد أن كل نقطة اتصال بها أكثر من مجهولين وبالتالى لانستطيع اكمال باقى الحل بطريقة اتزان المفاصل ، وفى هذه الحالة نكمل الحل باستخدام طريقة القطاع (أو على الأقل نوجد القوى فى بعض الأعضاء التى تساعدنا فى أن نستخدم طريقة اتزان نقط الاتصال مرة أخرى) ، وفى هذا المثال سوف نأخذ القطاع بطريقة معينة – أنظر شكل رقم (١٠) – وهذا القطاع يقطع خمسة أعضاء ولكن هناك أربعة أعضاء تلتقى عند نقطة ٢ ، وكذلك هناك أربعة أعضاء تلتقى عند نقطة ٣ ، وعليه لو أخذنا العزوم حول النقطة ٢ لأمكننا ايجاد القوة فى العضو ٣-٥ ، وكذلك لو أخذنا العزوم حول النقطة ٣ لأمكننا ايجاد القوة فى العضو ٢- A ، وذلك كما يلى :

ΣM @ 2 = 0.0 i.e. $4.5*4 - F_{3-5}*9 = 0.0$, or $F_{3-5} = 2$ ton (Compression) .

ΣM @ 3 = 0.0 i.e. $4.5*4 - F_{A-2}*9 = 0.0$, or $F_{A-2} = 2$ ton (Tension) .

or $\Sigma X = 0.0$ i.e. $F_{A-2} - 2 = 0.0$, or $F_{A-2} = 2$ ton (Tension). As Check.

- بعد ذلك نعود مرة أخرى الى طريقة اتزان نقط الاتصال (Method of Joints) ، وذلك للحصول على القوى الداخلية فى بقية أعضاء التركيب الشبكى ، على أن نبدأ بنقطة بها مجهولان فقط ثم نتابع الحل كما يلى :

Joint A :

$F_{A-4} = 2*(5/4) = 2.5$ ton (Compression).

$F_{A-7} = 4.5 - 1.5 = 3$ ton (Compression).

Joint 7 :

$F_{7-3} = - F_{7-4} = 2.5$ ton (Compression).

Joint 3 :

$F_{3-9} = 9 - 1.5 = 7.5$ ton (Compression).

Joint 5 :

$F_{5-9} = 2*(5/4) = 2.5$ ton (Tension).

$F_{5-6} = 1.5$ ton (Compression).

Joint 6

$F_{6-2} = - F_{6-9} = 2.5$ ton (Tension).

Joint 2 :

$F_{2-4} = 1.5$ ton (Compression).

Joint 4 :

$F_{4-9} = 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5$ ton (Compression).

Joint 9 : Check

$\Sigma Y = 4.5 + 1.5 + 1.5 - 7.5 = 0.0 \therefore$ O.K.

<u>تحليل التركيبات الشبكية المركبة (Analysis of Compound Trusses)</u>

تتكون الشبكيات المركبة من تلاقى اثنين أو أكثر من الشبكيات البسيطة (Simple Trusses) ، عادة باستخدام ثلاثة أعضاء - لاتكون متوازية ولاتكون ملتقية فى نقطة - لايمكن تحليلها كلية باستخدام طريقة القطاع (Method of Section) .

<u>مثال ٥</u>

للتركيب الشبكى المركب الموضح بالشكل رقم (١١) ، المطلوب بيان كيفية ايجاد القوى الداخلية فى جميع أعضائه .

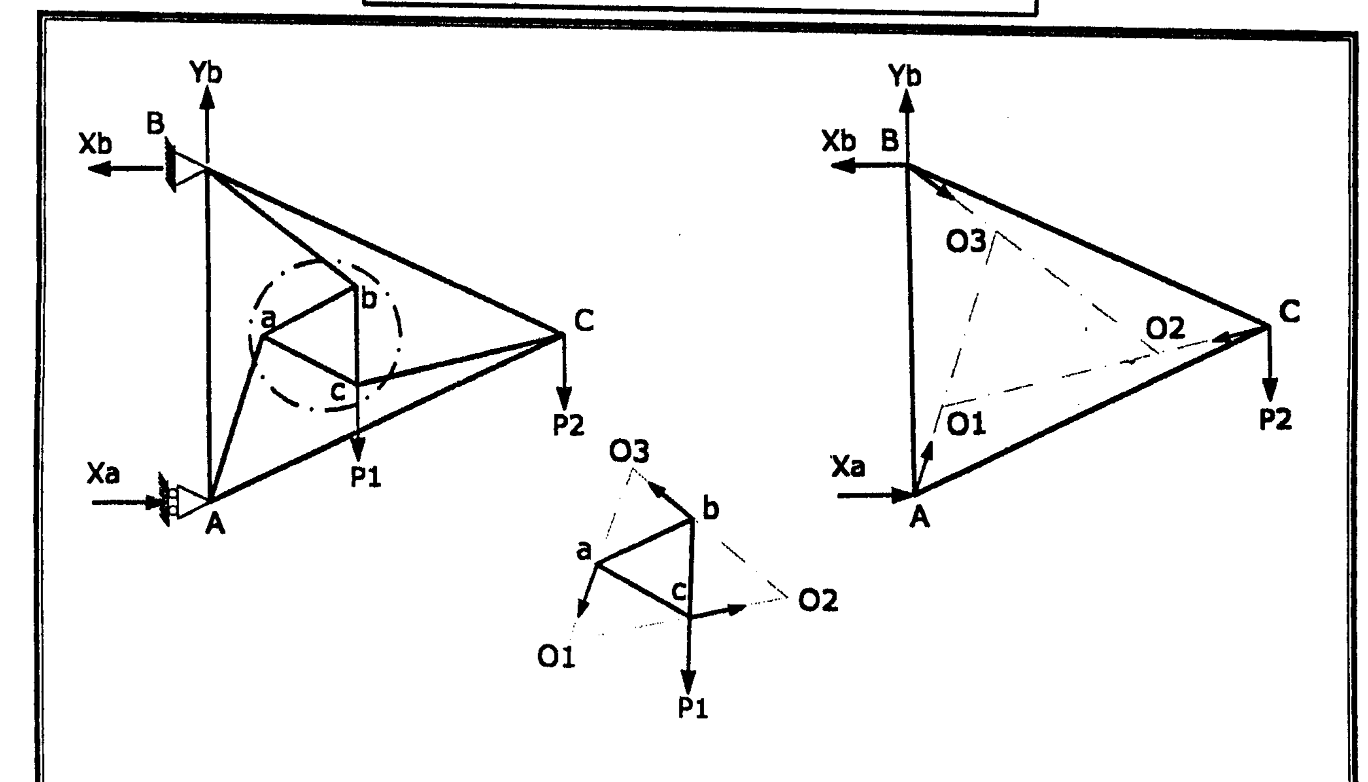


Figure (11)

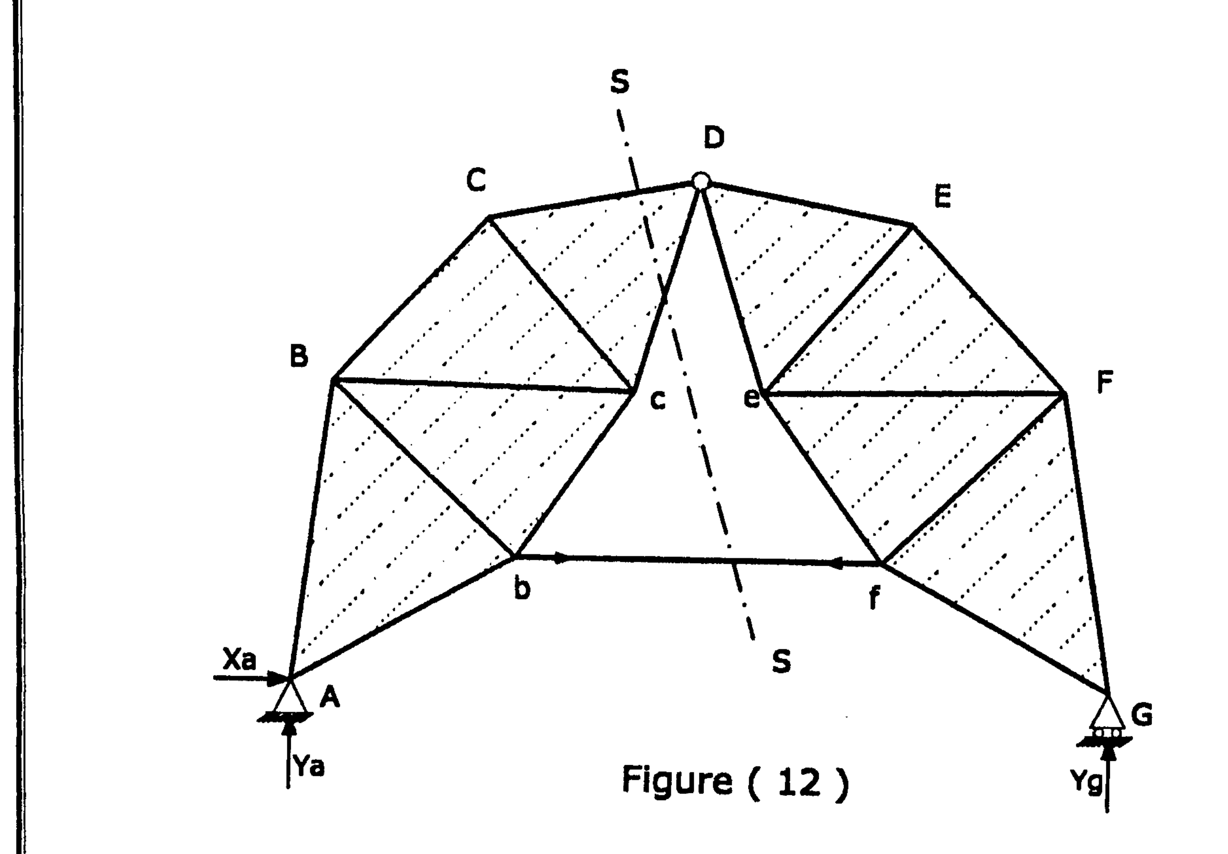


Figure (12)

الحل

نلاحظ أن التركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (١١) يتكون من مثلثين يرتبطان ببعضهما باستخدام ثلاثة أعضاء (B-b , A-a , C-c) ، وتتلخص خطوات الحل فيما يلى :

- تطبق معادلات الاتزان للحصول على ردود الفعل الخارجية عند (A , B) .
- تستخدم طريقة اتزان القطاع وذلك لايجاد القوى الداخلية فى الأعضاء الموصلة (A-a , B-b , C-c) ، وذلك بعمل قطاع على شكل دائرة حول المثلث الداخلى .
- تطبق معادلات الاتزان لأى من جزئى التركيب الشبكى للحصول على القوى ($F_{A\text{-}a}, F_{B\text{-}b}, F_{C\text{-}c}$)
- بعد الحصول على القوى فى الأعضاء الموصلة ، يمكن ايجاد القوى فى بقية أعضاء التركيب الشبكى وذلك باستخدام طريقة اتزان نقط الاتصال (Method of Joints) .

مثال ٦

التركيب الشبكى المركب الموضح بالشكل رقم (١٢) ، يتكون من اثنين من التركيبات الشبكية البسيطة (Simple Trusses) يتصلان عن طريق العضو b-f ، ونقطة الاتصال d (Joint d) . وتتلخص خطوات حل مثل هذه التركيبات الشبكية فيما يلى :

- ايجاد ردود الأفعال الخارجية باستخدام معادلات الاتزان المعروفة .
- ايجاد القوى فى العضوين (A-B , A-b) باستخدام طريقة اتزان نقط الاتصال (نقطة A) .
- ايجاد القوى فى العضوين (g-F , g-f) باستخدام طريقة اتزان نقط الاتصال (نقطة g) .
- بعد ذلك نلاحظ أنه لايمكن ايجاد القوى فى بقية أعضاء التركيب الشبكى – بأى من الطريقتين المعروفتين (طريقة اتزان القطاع أو طريقة اتزان نقط الاتصال) – الا بعد ايجاد القوة فى العضو الرابط بين جزئى التركيب الشبكى ، وهو العضو (b-f) ، وذلك عن طريق عمل قطاع يقطع الأعضاء (C-d , c-d , b-f) ، وبأخذ العزوم عند نقطة d للجزء الأيسر نوجد القوة فى العضو (b-f) .
- ايجاد القوى الداخلية فى بقية أعضاء التركيب الشبكى باستخدام أى من الطريقتين المعروفتين (طريقة اتزان القطاع أو طريقة اتزان نقط الاتصال) .

مثال ٧

التركيب الشبكى المركب الموضح بالشكل رقم (١٣) يتكون من اثنين من التركيبات الشبكية البسيطة ويرتبطان ببعضهما عن طريق تركيب شبكى اضافى (Secondary truss) . لحل مثل هذه التركيبات الشبكية لابد من دراسة حالتى التحميل الآتيتين :

(a)

(b)

(c)

Figure (13)

Figure (14)

الحالة الأولى : التركيب الشبكى الاضافى غير محمل (Unloaded) ، فى هذه الحالة يعتبر سلوك التركيب الشبكى الاضافى هو نفسه سلوك عضو مستقيم وعلى ذلك يمكن استبدال التركيب الشبكى الاضافى بعضو مستقيم (D-E) أنظر شكل رقم (١٣) . وتكون خطوات الحل كما يلى :

- يتم استبدال التركيب الشبكى الاضافى بعضو مستقيم مكافئ (D-E) وفى هذه الحالة يصبح التركيب الشبكى الناتج مماثل للتركيب الشبكى السابق فى المثال رقم (٦) لذلك يكون الحل هو ايجاد القوة فى الضلع المكافئ (D-E) أولا ثم ايجاد القوى الداخلية فى بقية أعضاء التركيب الشبكى بنفس الطريقة المذكورة فى المثال السابق .
- يتم ايجاد القوى الداخلية فى التركيب الشبكى الاضافى وذلك بوضع القوة المؤثرة على العضو المكافئ (D-E) على التركيب الشبكى الاضافى على شكل قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادتين فى الاتجاه وتؤثران عند النقطتين (D , E) ، كما هو موضح بالشكل رقم (١٣) ، ثم بعد ذلك يتم دراسة اتزان التركيب الشبكى الاضافى تحت تأثير هاتين القوتين ومن ثم ايجاد القوى الداخلية فى جميع أعضاء التركيب الشبكى الاضافى .

الحالة الثانية : التركيب الشبكى الاضافى محمل (Loaded) – كما فى الشكل رقم (١٤) - فى هذه الحالة يعمل كعضو مفرد (D-E) بالاضافة الى أنه ينقل الحمل الموجود عليه الى التركيب الشبكى الأصلى عند نقطتى الاتصال (D , E) ، وعلى ذلك تكون خطوات الحل كما يلى :

- يتم ايجاد ردود الأفعال الخارجية ، ثم بعد ذلك نستبدل التركيب الشبكى الاضافى بقوتين احداهما راسية – وهى تمثل تأثير الحمل الاضافى – والأخرى أفقية (F_{D-E}) – وهى تمثل تأثير العضو المكافئ DE – وذلك عند نقطتى الاتصال (D , E) ، ثم نأخذ العزوم حول نقطة الاتصال C لأى من جزئى التركيب الشبكى الأصلى - وذلك لايجاد القوة فى العضو المكافئ (F_{D-E}) ، كما يلى :

ΣM @ $C = 0.0$ i.e. $F_{D-E} = \{(P/2 + Q/2)*(2a) - (Q/2)*a \}/a$, or $F_{D-E} = P + Q/2$

- يتم ايجاد القوى الداخلية فى بقية أعضاء التركيب الشبكى الأصلى بتطبيق طريقتى اتزان القطاع أو نقط الاتصال فى سهولة ويسر .
- يتم بعد ذلك ايجاد القوى الداخلية فى أعضاء التركيب الشبكى الاضافى .

الشبكيات المجزأة ثانويا (Subdivided Trusses)

أحيانا يلزم تقسيم فتحات الشبكيات البسيطة (Simple Trusses) باضافة أعضاء ثانوية ، لتكون بذلك أحد التركيبات الشبكية المركبة (Compound Trusses) – أنظر شكل رقم (١٥) . وحيث أن التركيبات

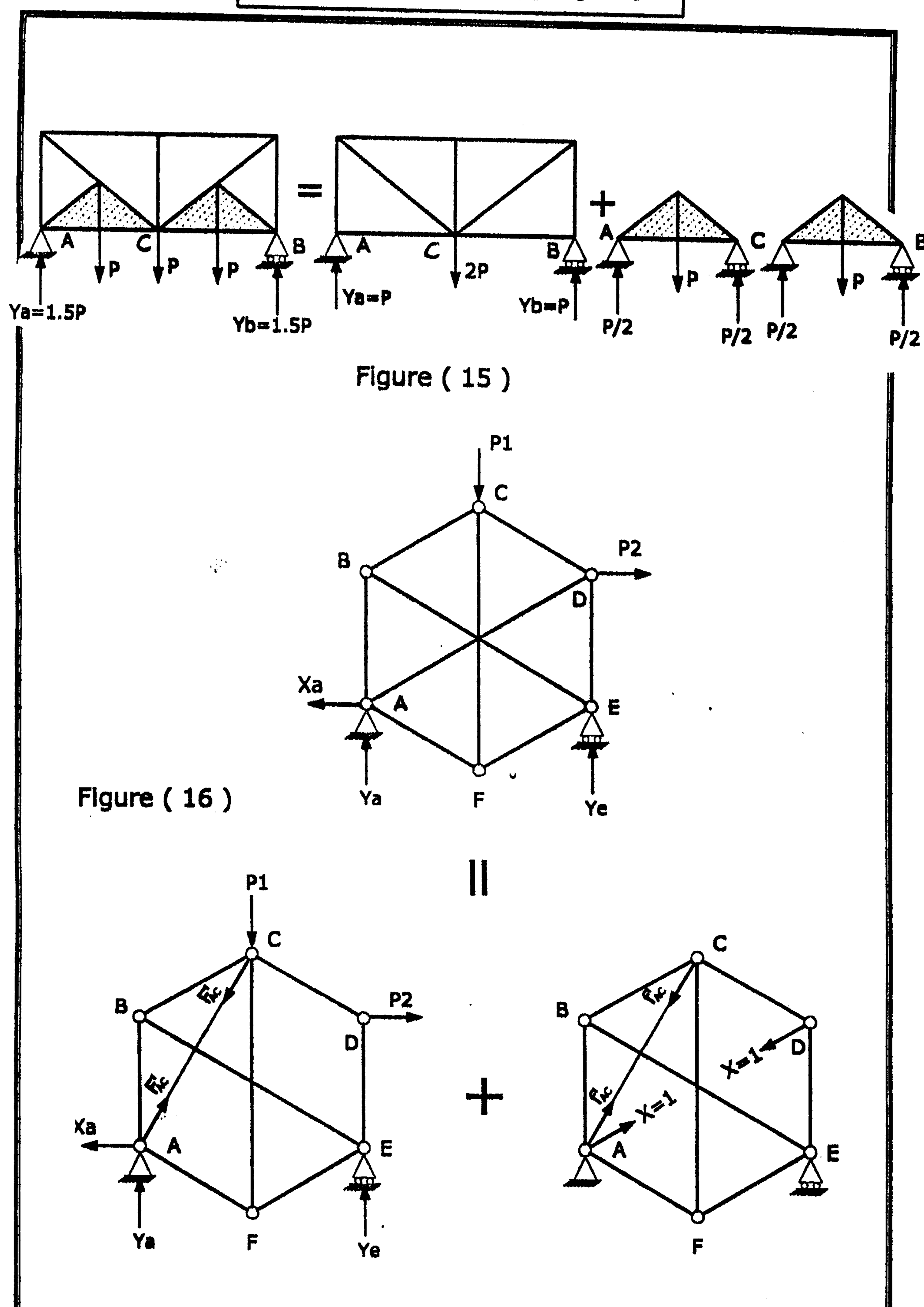


Figure (15)

Figure (16)

الشبكية المجزأة ثانويا هى عبارة عن تركيبات شبكية بسيطة (شبكيات رئيسية Main Trussess) ، مضافا اليها تركيبات شبكية ثانوية (Secondary Trusses) ، فانه لايجاد القوى الداخلية لأى عضو من أعضاء الشبكيات المجزأة ثانويا ، يتم اضافة تأثير كلا من الشبكيات الرئيسية والثانوية ، وذلك بعد دراسة كلا منهما على حدة . وعموما يتم اللجوء الى مثل هذه التركيبات الشبكية فى حالة المنشآت ذات البحور الكبيرة مثل الكبارى والأسقف الخفيفة للمصانع والورش و الجراجات وغيرها ، وذلك لأسباب اقتصادية .

الشبكيات المعقدة (Complex Trusses)

المقصود التركيبات الشبكية المعقدة (Complex Trusses) هى تلك التركيبات التى لايمكن تصنيفها على أنها تركيبات شبكية بسيطة (Simple Trusses) أو مركبة (Compound Trusses) . وعند تحليل هذا النوع من الشبكيات ، نجد أن طريقة اتزان القطاع أو طريقة اتزان نقط الاتصال لايمكن تطبيقها بصفة مباشرة .

مثال ٨

فى هذا المثال نجد أن عدد نقط الاتصال فى الشكل رقم (١٦- a) تساوى ٦ ، وعدد الأعضاء يساوى ٩ وهذا ينطبق مع المعادلة ($m + 3 = 2j$) أى أنه محدد استاتيكيا ، ورغم ذلك لانستطيع ايجاد القوى فى أعضائه بطريقتى اتزان القطاع ونقط الاتصال بسهولة ، لأن ذلك يستلزم تكوين وحل عددا من المعادلات الآنية وعددها يساوى ($2j$) بواقع معادلتين لكل نقطة اتصال وبالطبع هذا أمر شاق وخصوصا بالحسابات اليدوية . ولكى يتم التغلب على هذه الصعوبة ، سوف يتم عمل تعديل لحظى فى شكل التركيب الشبكى المعقد ليصبح تركيبا شبكيا بسيطا ، ثم بعد ذلك عمل معالجة للتركيب الشبكى البسيط بحيث يتم الغاء التعديل اللحظى ثانية وفى نفس الوقت نكون قد أوجدنا القوى الداخلية فى جميع أعضاء التركيب الشبكى المعقد ، وفيما يلى تفصيل ذلك :

- يتم ازالة العضو AD فى شكل (16-a) ووضع العضو AC ، وذلك للحفاظ على ثبات عدد الأعضاء ، وبذلك يتحول التركيب الشبكى المعقد الى التركيب الشبكى البسيط الموجود فى شكل رقم (16-b) .
- يتم تحليل التركيب الشبكى البسيط بما عليه من قوى أصلية ، ومن ثم ايجاد القوى فى جميع أعضائه وخاصة القوة فى العضو الجديد AC ، ولتكن هذه القوة هى (F'_{AC}) .
- نعتبر نفس التركيب الشبكى البسيط - بدون أحمال خارجية – ويتم وضع قوتين متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه عند النقطتين (A , D) وفى اتجاه العضو المزال AD ، ولتكن قيمة هاتان القوتان هى ($X=1$) ، ويتم تحليل هذا التركيب الشبكى البسيط تحت تأثير هاتان القوتان فقط ومن ثم ايجاد القوى فى جميع أعضاء التركيب الشبكى ومنها القوة فى العضو الجديد AC ولتكن هذه القوة هى (f'_{AC}) ، أنظر شكل رقم (16-c) .

- ولكى نعود الى الشكل الأصلى ، يجب جمع الحالتين السابقتين بحيث يتحقق شرط أساسى وهو أن القوة فى الضلع AC يجب أن تساوى صفر أى أن :

$$F_{AC} = F'_{AC} + X*f'_{AC} = 0.0$$

- حيث X هى قيمة القوة فى الضلع الذى تم ازالته وهو (AD) ، ولايجاد القوى النهائية فى بقية أعضاء التركيب الشبكى نطبق معادلة التجميع الآتية :

$$F = F' + X*f'$$

- حيث F هى القوة النهائية فى عضو ما ، F' هى القوة الناتجة من الحالة الأولى فى نفس العضو ، f' هى القوة فى نفس العضو والناتجة من الحالة الثانية (X=1) .

ثانيا : الطريقة التخطيطية(Graphical Method) لتحليل التركيبات الشبكية (الجمالونات)

تعتبر الطريقة التخطيطية من أسهل الطرق لايجاد القوى الداخلية فى أعضاء التركيبات الشبكية ، لكونها تعطينا جميع القوى الداخلية فى شكل واحد يسمى شكل مجمع القوى (Stress diagram) أو شكل ماكسويل (Maxwell diagram) كما سيأتى ذكره فيما بعد ، ولكون هذه الطريقة تخطيطية فان النتائج تعتمد على دقة الرسم . وفيما يلى الخطوات اللازمة لاجراء هذه الطريقة :

- يتم حساب ردود الأفعال الخارجية باستخدام معادلات الاتزان المعروفة .
- يتم ترقيم للفراغات بين الأحمال الخارجية أو ردود الأفعال بأرقام دورية متتابعة مع اتجاه عقارب الساعة بدءا من أى فراغ .
- يتم ترقيم الفراغات داخل كل مثلث من التركيب الشبكى وذلك بدءا من الرقم الذى يلى آخر رقم فى ترقيم الفراغات بين الأحمال الخارجية ومتابعة هذا الترقيم حتى آخر مثلث فى التركيب الشبكى دون اشتراط اتجاه معين للترقيم .
- يتم عمل مضلع قوى لكل نقطة اتصال وذلك بتحليل محصلة القوى عند كل وصلة الى مركبتين فى اتجاهى العضوين المراد ايجاد القوى الداخلية فيهما ، مع مراعاة أن نبدأ بوصلة بها مجهولين فقط ، أنظر شكل رقم (17 - b) ، وبامعان النظر فى هذا الشكل نلاحظ أنه عند رسم مضلع قوى لكل نقطة اتصال على حدة قد تكرر ظهور كل عضو مرتين وتجنبا لهذا التكرار وتوفيرا للوقت سوف يتم تجميع هذه المضلعات كلها فى مضلع واحد يسمى مجمع القوى أو شكل ماكسويل ، وفى هذا الشكل المجمع سوف يتم الغاء الأسهم الدالة على اتجاه القوى ويستعاض عنها بوضع رقمين لكل عضو أو قوة .
- لمعرفة قيمة القوة فى أى عضو ، يتم قياس المسافة – على شكل مجمع القوى - بين الرقمين الدالين على هذا العضو وضرب هذه المسافة فى مقياس الرسم .

- لمعرفة اتجاه القوة المؤثرة على أى نقطة اتصال من عضو معين ، نقف عند هذه النقطة ونقرأ الرقمين حول هذا العضو وتكون القراءة مع عقارب الساعة ، وليكن هذين الرقمين هما x,y ، فيكون اتجاه القوة هو الاتجاه من x الى y على شكل مجمع القوى (شكل ماكسويل) .
- آخر نقطة يتم رسمها على شكل ماكسويل ، يمكن رسمها بثلاث طرق مختلفة ، لذلك ربما يظهر ثلاث أماكن مختلفة لنفس النقطة وهذه الثلاث نقاط تكون مثلثا ويسمى هذا المثلث مثلث خطأ القفل (Error of Closure) ، وكلما كان هذا المثلث صغيرا كلما كانت دقة النتائج أعلى والعكس صحيح . ويصبح الحل مثاليا وصحيحا تماما اذا تلاشى هذا المثلث ، وهذا لايحدث غالبا الا اذا تم الرسم على الحاسب الآلى. ومن الطرق العملية لتقليل خطأ القفل أن نبدأ برسم شكل ماكسويل من جانبى التركيب الشبكى معا ونتجه نحو الداخل وهذا من شأنه أن يقلل الخطأ التراكمى .
- بعد ذلك يتم تحديد نوعية القوى الموجودة فى الأعضاء من حيث كونها قوة شد أو قوة ضغط .
- ونظرا لأن الأعضاء المعرضة لقوى ضغط تحتاج الى احتياطات خاصة فى التصميم لأنها معرضة للانبعاج (Buckling) ، فاننا أحيانا نميز هذه الأعضاء بخطوط سميكة .

<u>مثال ٩</u>

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (١٧) ، المطلوب رسم شكل مجمع القوى (شكل ماكسويل) وايجاد القوى فى جميع أعضاء التركيب الشبكى .

الحل

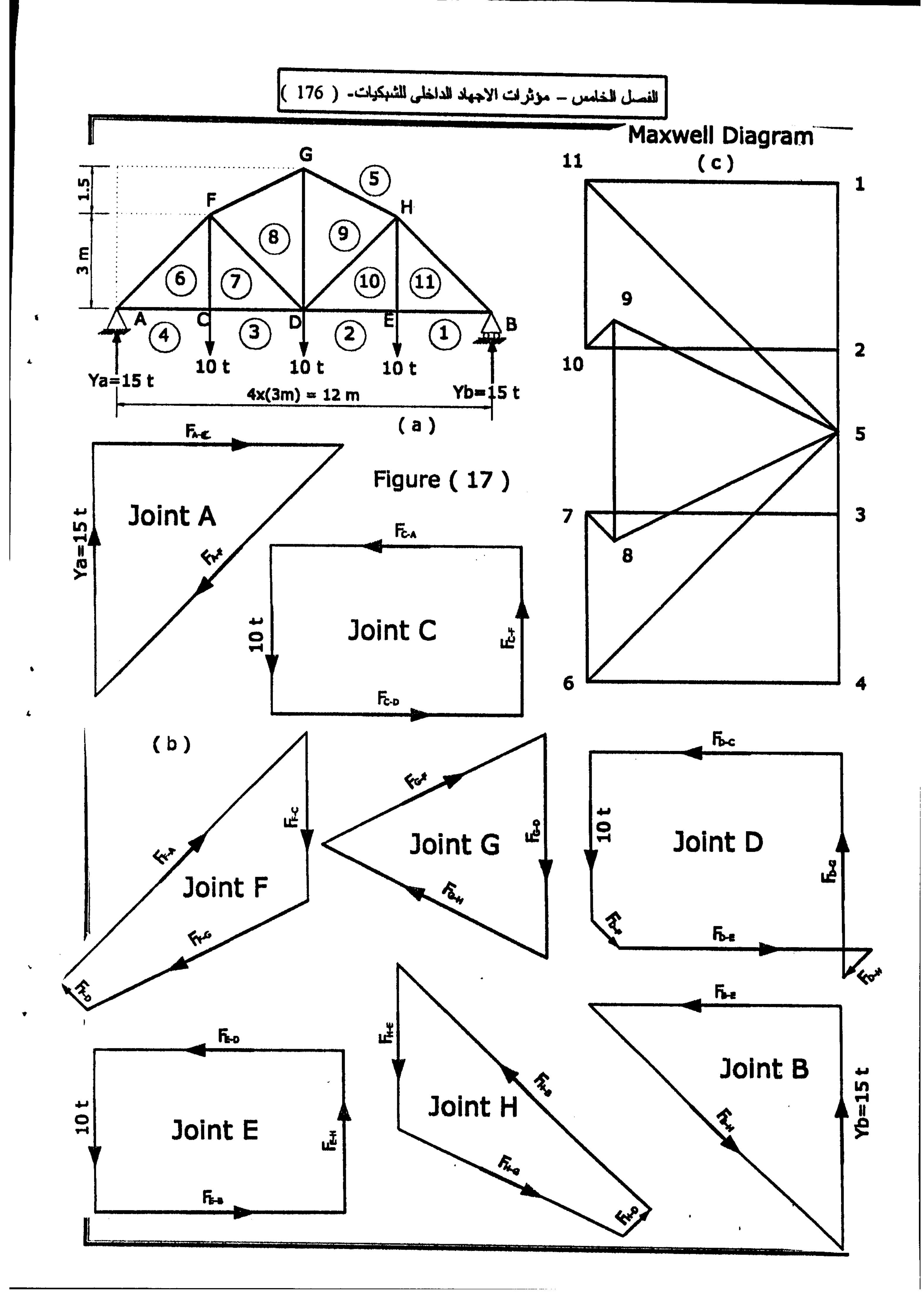
بناءا على ما تقدم يمكن تتبع رسم شكل مجمع القوى ومن ثم تحديد قيمة واتجاه القوى فى جميع أعضاء التركيب الشبكى .

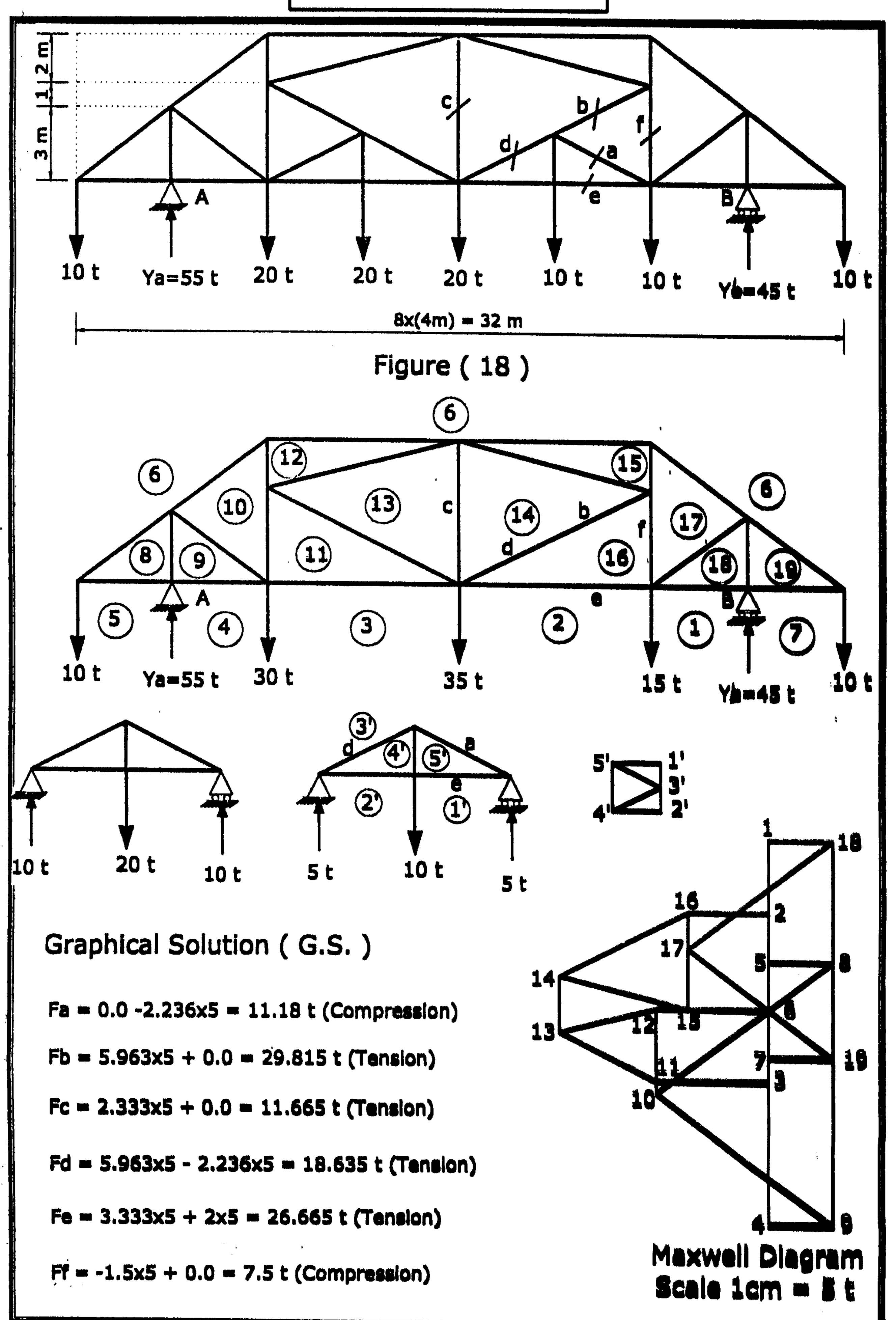
<u>مثال ١٠</u>

للتركيب الشبكى المجزأ ثانويا (Subdivided Truss) والمبين بالشكل رقم (١٨) ، المطلوب رسم شكل ماكسويل والتحقق حسابيا من القوى فى الأعضاء المؤشر عليها بالعلامة (/) .

الحل

يتم فصل التركيبات الشبكية الثانوية أولا ونوجد تأثيرها على التركيب الشبكى الأصلى ، ثم بعد ذلك ايجاد ردود الأفعال الخارجية للتركيب الشبكى الأصلى ويتم تتابع الحل بعد ذلك كما يلى :


Maxwell Diagram
(c)
11
1
9
10
2
5
7
3
8
6
4
G
5
F
H
1.5
3 m
8
9
6
7
10
11
A
C
D
E
B
4
3
2
1
10 t
10 t
10 t
Ya=15 t
Yb=15 t
4x(3m) = 12 m
(a)
Figure (17)
Joint A
Ya=15 t
Joint C
10 t
(b)
Joint F
Joint G
Joint D
10 t
Joint E
10 t
Joint H
Joint B
Yb=15 t



Graphical Solution (G.S.)

Fa = 0.0 -2.236x5 = 11.18 t (Compression)

Fb = 5.963x5 + 0.0 = 29.815 t (Tension)

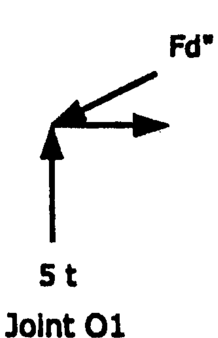
Fc = 2.333x5 + 0.0 = 11.665 t (Tension)

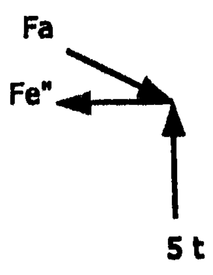
Fd = 5.963x5 - 2.236x5 = 18.635 t (Tension)

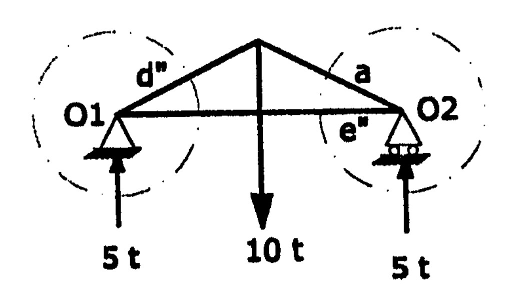
Fe = 3.333x5 + 2x5 = 26.665 t (Tension)

Ff = -1.5x5 + 0.0 = 7.5 t (Compression)

For Secondary Truss



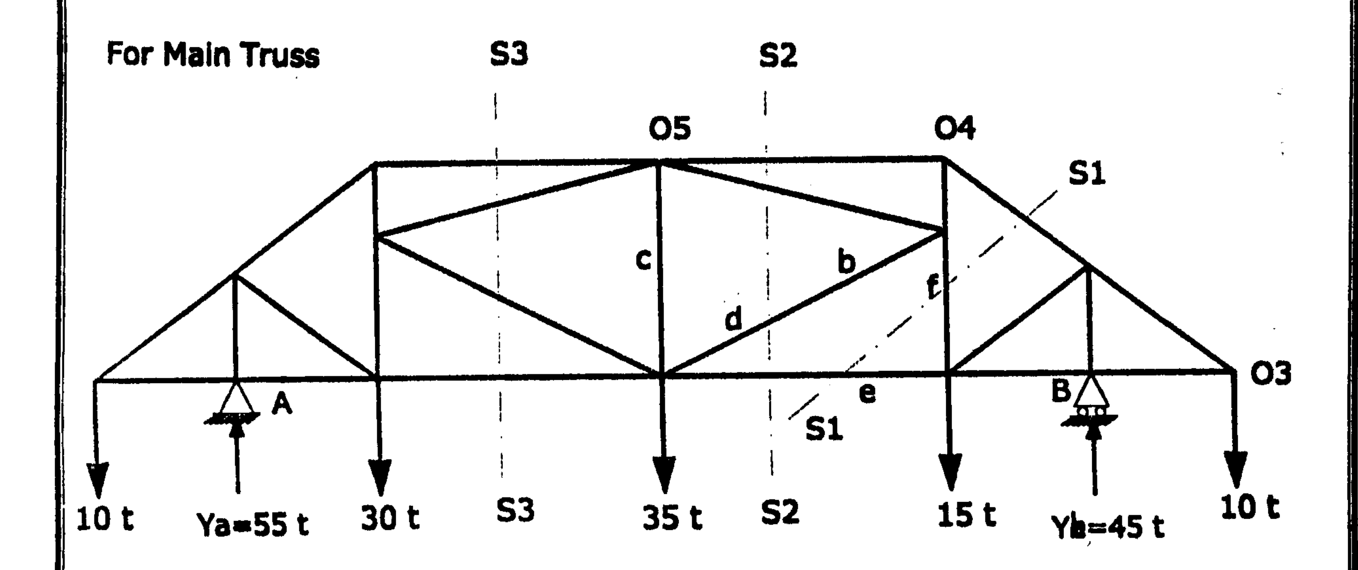




Fd" = Fa = 5 / (2/4.472) = 11.18 t (Compression)

Fe" = 5 / (2/4) = 10 t (Tension)

For Main Truss

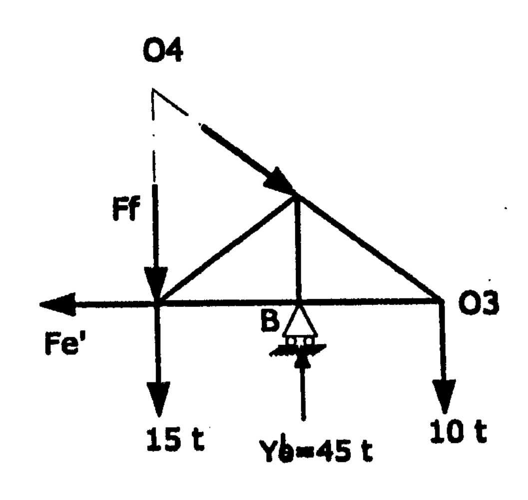


M@O3 = 0.0

Ff=7.5 t (Compression)

M@O4 = 0.0

Fe' = 16.667 t (Tension)



$V1 + V2 = 45 - 15 - 10 = 20$

$H/V1 = 8/2 = 4$

$H = 4*V1$

$H/V2 = 8/4 = 2$

$H = 2*V2$

$4*V1 = 2*V2$

$V1 = 0.5*V2$

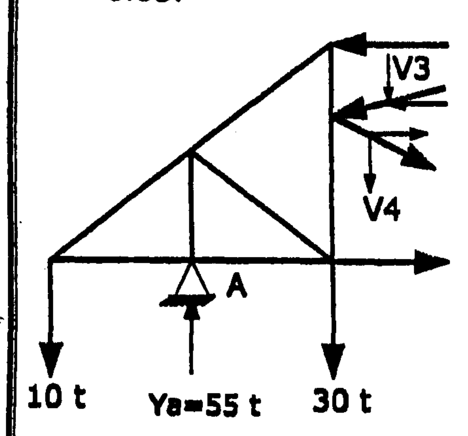
$0.5V2 + V2 = 20$, or $1.5V2=20$, $V2=13.3333$

$H = 2*V2 = 26.6666$

Fd'=Fb = 29.8142 t (Tension)

$V1 = 6.667$

V1
H
H
Fd' = Fb
V2
Fe'
B
15 t
Yb=45 t
10 t



$V3 + V4 = 15$

$V3 = 0.5V4$

$V3 = 5$

$V3 + V4 = 15$

V3 Fc V1
Joint O5

$Fc = V1+V3 = 6.667+5$

Fc =11.667 t (Tension)

SUMMARY

Analytical Solution (A.S.)

Fa = 11.18 t (Comp.)

Fb = 29.814 t (Ten.)

Fc = 11.667 t (Ten.)

Fd = 18.634 t (Ten.)

Fe = 26.667 t (Ten.)

Ff = 7.5 t (Comp.)

Force	A.S.	G.S.	Status of force
Fa	11.18	11.18	Compression
Fb	29.814	29.815	Tension
Fc	11.667	11.665	Tension
Fd	18.634	18.635	Tension
Fe	26.667	26.665	Tension
Ff	7.5	7.5	Compression

أولا : الحل التخطيطى

- يتم رسم شكل ماكسويل للتركيب الشبكى الأصلى وذلك بعد ترقيمه .
- يتم رسم شكل ماكسويل للتركيبات الشبكية الثانوية .
- يتم ايجاد القوة فى أى عضو ، حسب تصنيف هذا العضو . فاذا كان العضو المراد ايجاد القوة فيه يقع فى التركيب الشبكى الرئيسى فقط ، يتم حسابه من شكل ماكسويل للتركيب الشبكى الأصلى فقط ، واذا كان العضو يقع فى التركيب الشبكى الثانوى فقط ، يتم حسابه من شكل ماكسويل للتركيب الثانوى فقط . أما اذا كان العضو مشترك بين التركيب الشبكى الرئيسى والتركيب الشبكى الثانوى ، فان القوة فى هذا العضو هى عبارة عن مجموع القوتين الناتجتين من التركيب الشبكى الرئيسى والتركيب الشبكى الثانوى .

ثانيا : الحل التحليلى

يمكن تتبع خطوات الحل التحليلى ، اما باستخدام طريقة اتزان نقط الاتصال (Method of Joints) أو طريقة اتزان القطاعات (Method of Sections) . أنظر شكل رقم (١٨) .

مثال ١١

الشكل رقم (١٩) يبين تركيبا شبكيا مركبا ، والمطلوب رسم شكل مجمع القوى (شكل ماكسويل) .

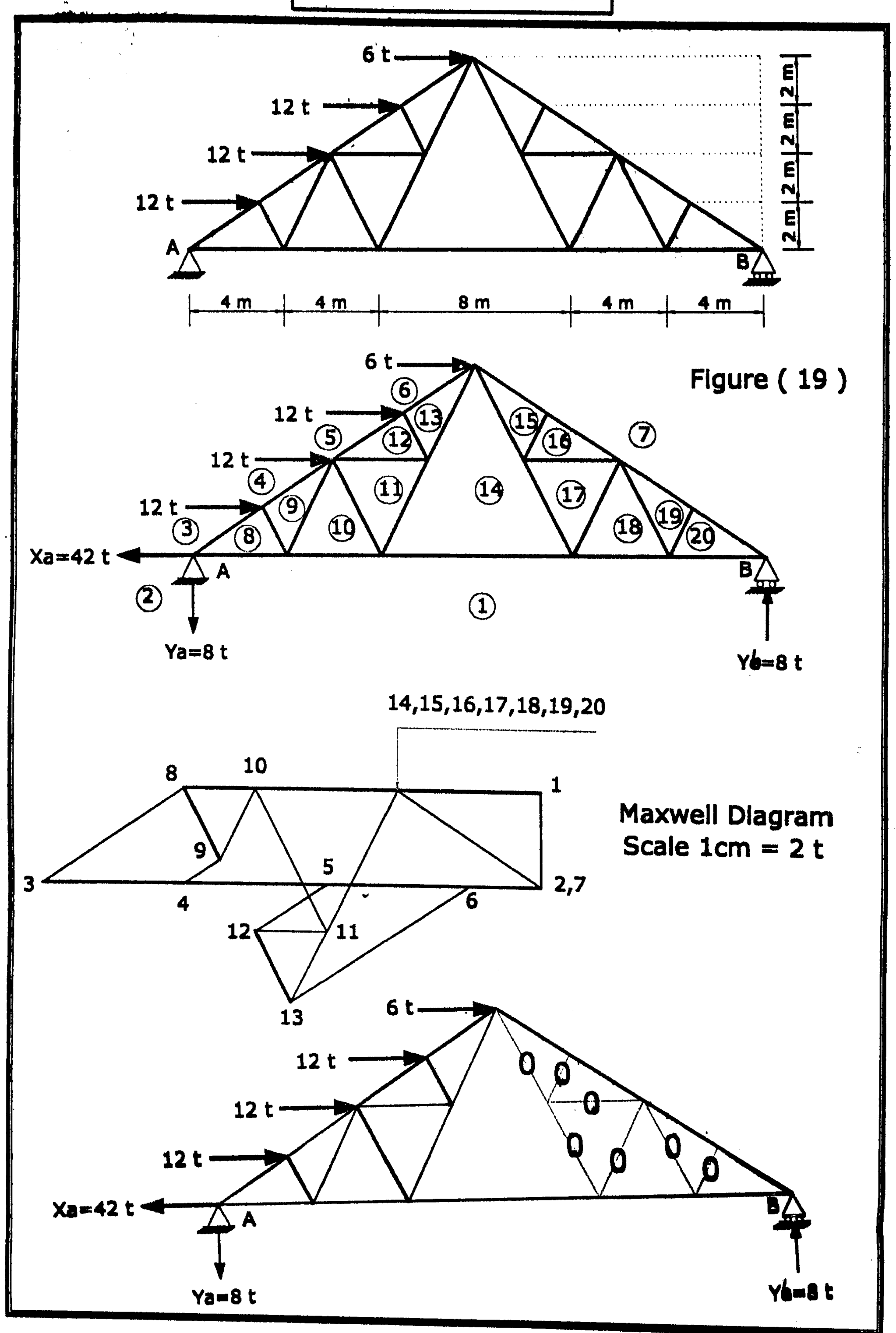
الحل

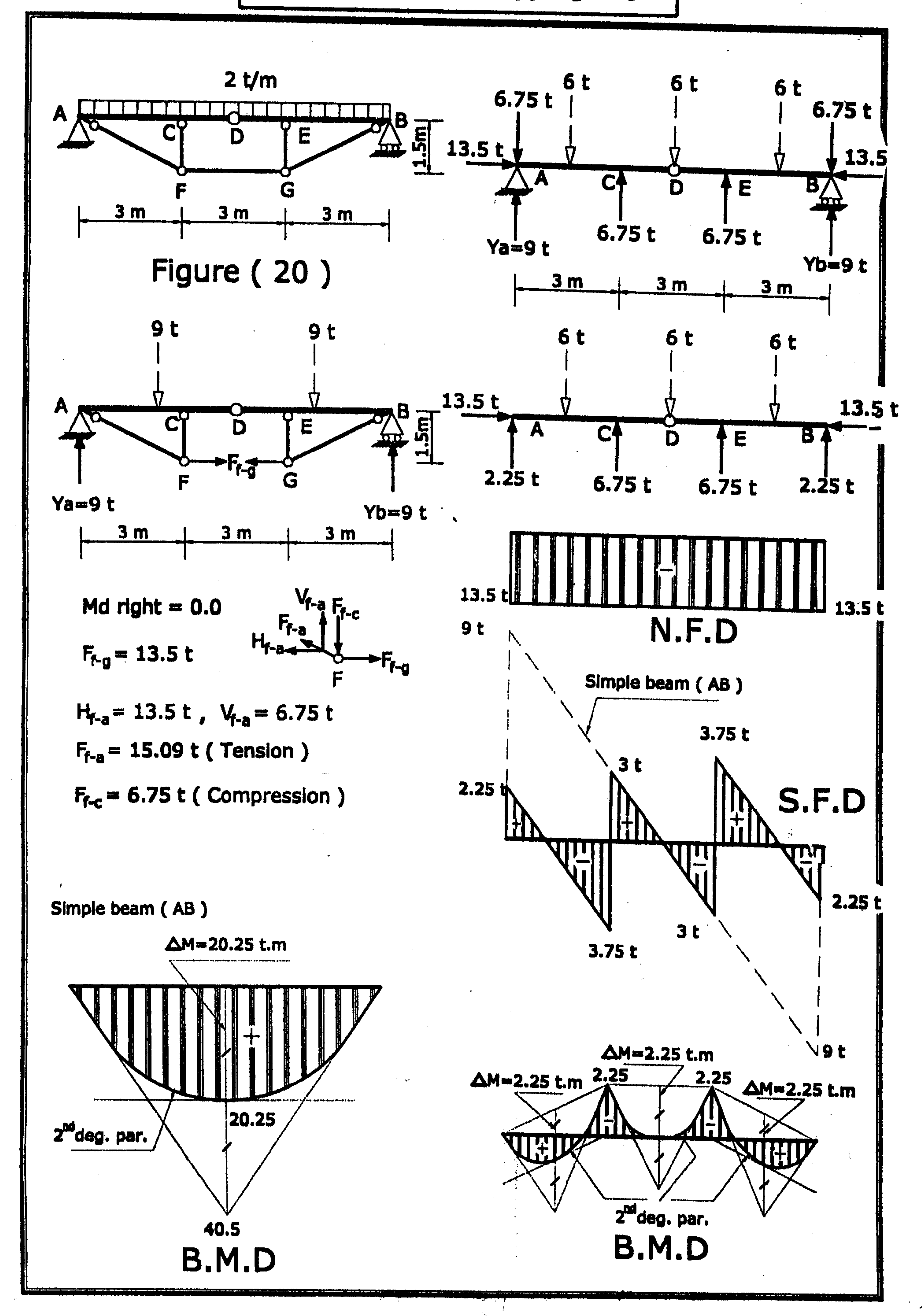
فى هذا المثال يلزم اتخاذ بعض الاعتبارات عند استخدام الطريقة التخطيطية ، وفيما يلى خطوات الحل :

- يتم حساب ردود الأفعال الخارجية باستخدام معادلات الاتزان المعروفة.
- يتم ترقيم التركيب الشبكى كما هو موضح بالشكل رقم (١٩) .
- نبدأ برسم شكل مجمع القوى بدءا من الرقم ١ وحتى الرقم ٢٠ ، ولكننا نلاحظ أننا سوف نصل الى الرقم ١٠ من اليسار ولن نستطيع اكمال شكل مجمع القوى ، وذلك لأن الوصلة D عندها ثلاث مجاهيل هى القوى فى الأعضاء (١٠-١١ ، ١١-١٤ ، ٦-١٤) ولذلك نحاول الحصول على القوة فى الضلع DE (٦-١٤) حسابيا باستخدام طريقة اتزان القطاع . ثم بعد ذلك نوقع هذه القوة على شكل ماكسويل ، وبالتالى نستطيع توقيع الرقم ١٤ ومن ثم نستطيع اكمال شكل ماكسويل فى سهولة ويسر .

مثال ١٢

الشكل رقم (٢٠) يبين كمرة مفصلية مركبة ومقواه بأعضاء شبكية ويسمى هذا النوع بالكمرات ذات الأجزاء الشبكية (Trussed Beams) ، والمطلوب ايجاد القوى الداخلية فى الأعضاء الشبكية وكذلك رسم أشكال القوى العمودية وقوى القص وعزوم الانحناء .


6 t
12 t
12 t
12 t
A
B
2 m
2 m
2 m
2 m
4 m
4 m
8 m
4 m
4 m
Figure (19)
Xa=42 t
Ya=8 t
Yb=8 t
14,15,16,17,18,19,20
Maxwell Diagram
Scale 1cm = 2 t


2 t/m
A
B
C
D
E
F
G
1.5m
3 m
3 m
3 m
Figure (20)
6.75 t
6 t
6 t
6 t
6.75 t
13.5 t
13.5
Ya=9 t
Yb=9 t
6.75 t
6.75 t
9 t
9 t
F_{f-g}
2.25 t
2.25 t
13.5 t
13.5 t
Md right = 0.0
F_{f-g} = 13.5 t
H_{f-a} = 13.5 t , V_{f-a} = 6.75 t
F_{f-a} = 15.09 t (Tension)
F_{f-c} = 6.75 t (Compression)
V_{f-a} F_{f-c}
F_{f-a}
H_{f-a}
N.F.D
Simple beam (AB)
3.75 t
3 t
S.F.D
3 t
3.75 t
9 t
Simple beam (AB)
ΔM=20.25 t.m
20.25
2nd deg. par.
40.5
B.M.D
ΔM=2.25 t.m
2.25
2.25
ΔM=2.25 t.m
ΔM=2.25 t.m
2nd deg. par.
B.M.D

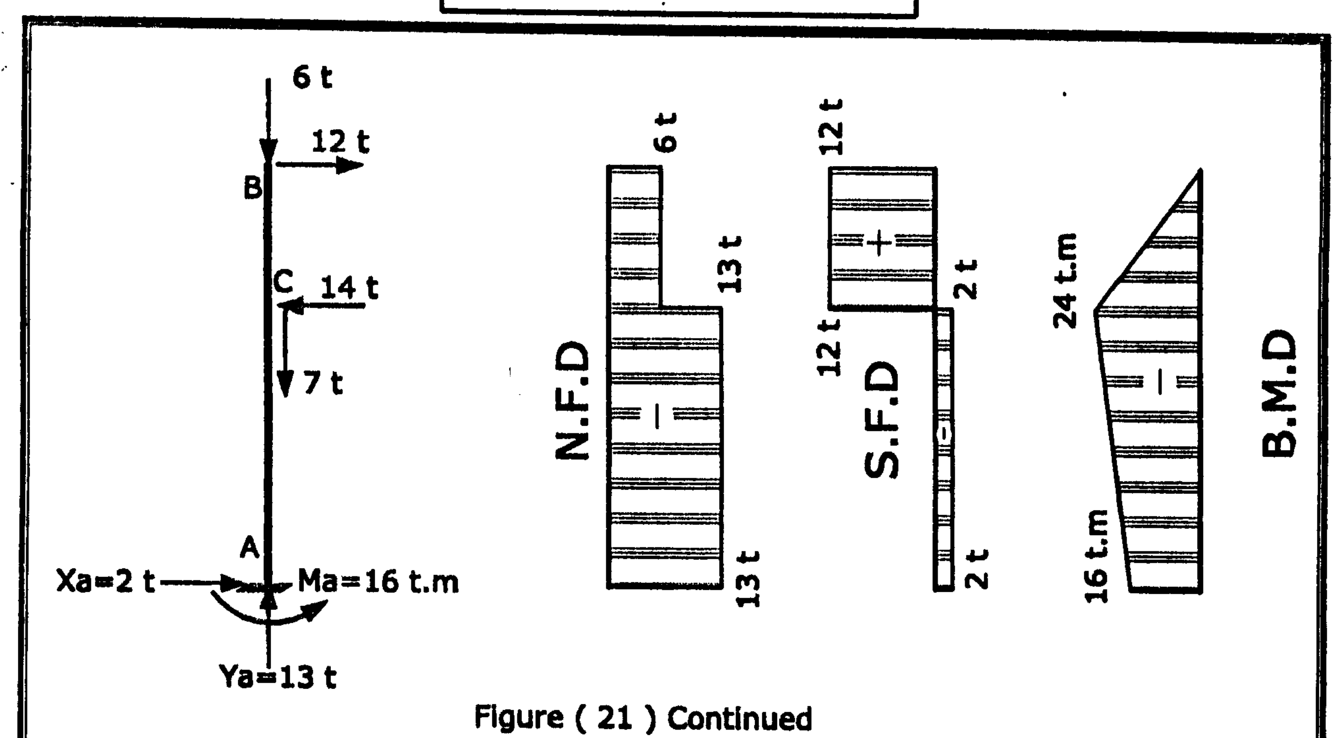


Figure (21) Continued

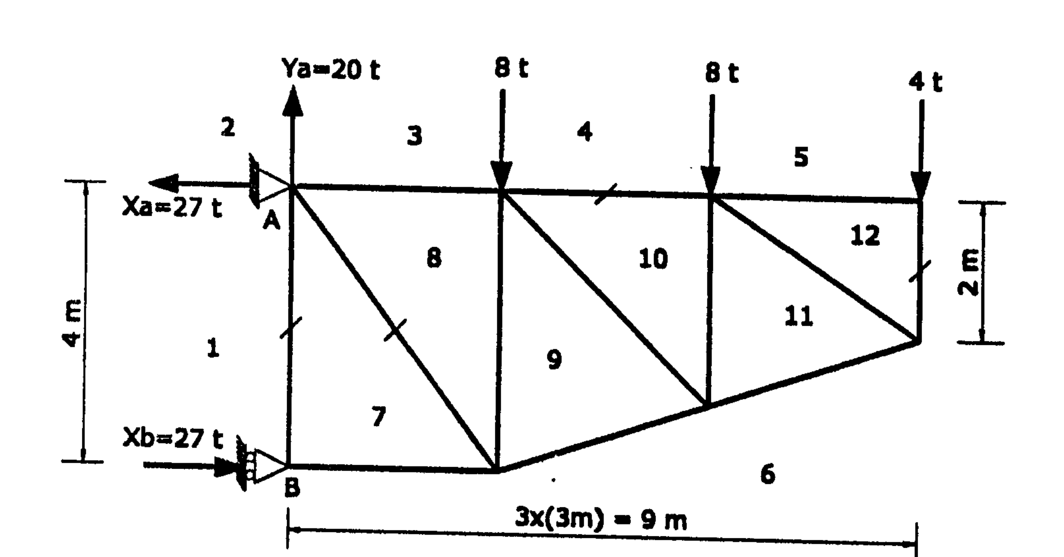


Figure (22)

مثال ١٤

الشكل رقم (٢٢) يبين تركيبا شبكيا على شكل كابولى ، والمطلوب رسم شكل ماكسويل .

الحل

تتلخص خطوات الحل فى الآتى :

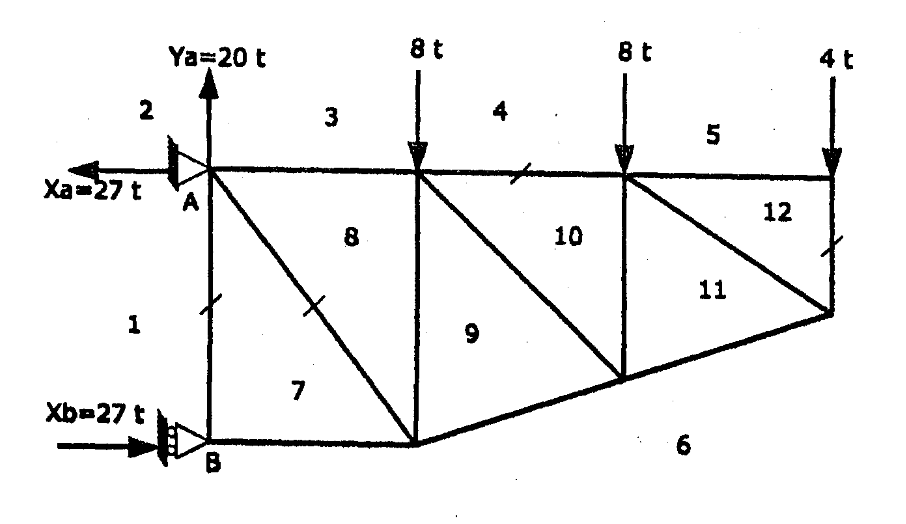
- حساب ردود الأفعال الخارجية للمنشأ .
- ترقيم الفراغات بين القوى الخارجية ، وكذلك الفراغات الداخلية .
- يتم رسم شكل ماكسويل (مجمع القوى) كما هو موضح بالشكل رقم (٢٢) .

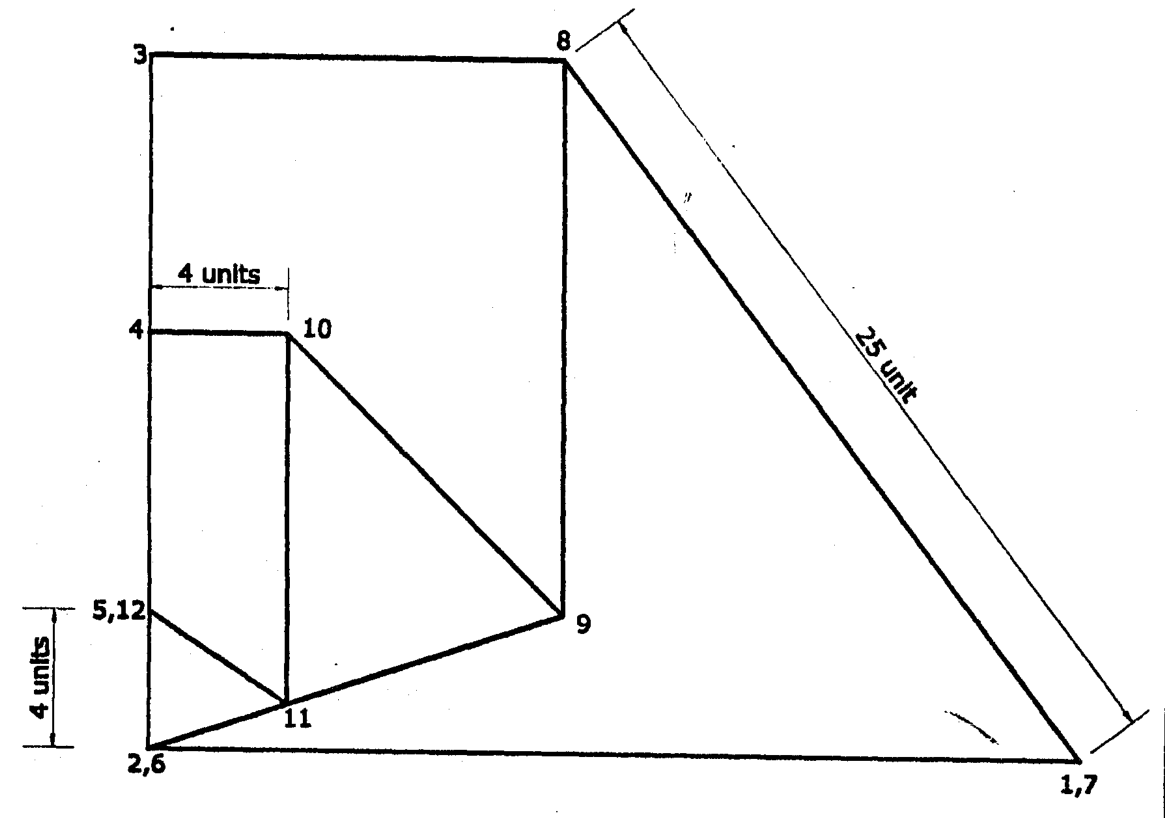
مثال ١٥

للتركيب الشبكى الموضح بالشكل رقم (٢٣) ، المطلوب رسم شكل ماكسويل .

الحل

يمكن تتبع خطوات الحل ورسم شكل ماكسويل كما هو موضح بالشكل رقم (٢٣) .





Maxwell Diagram

Scale 1 unit = 1 ton

Figure (22) Continued

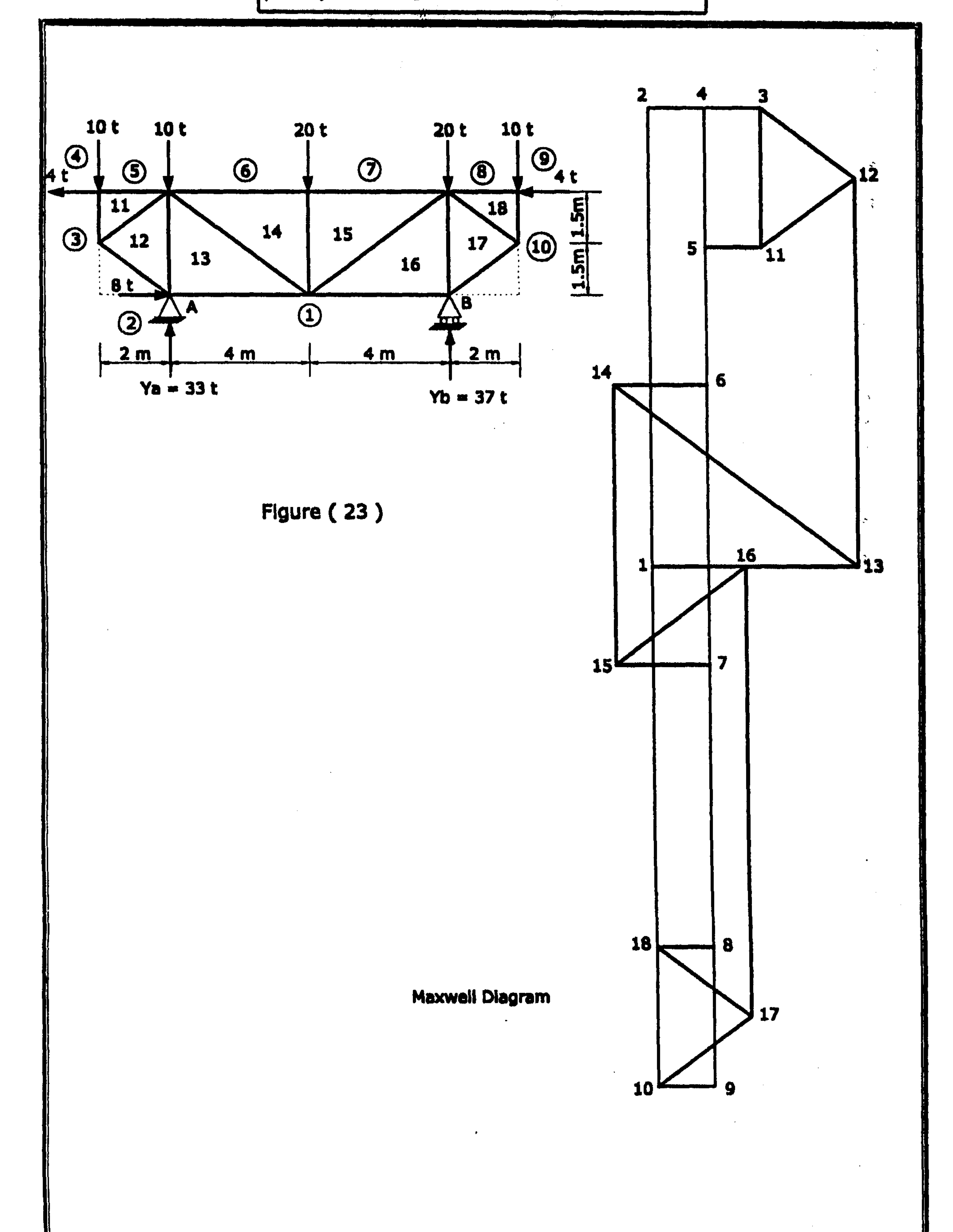

10 t
10 t
20 t
20 t
10 t
4 t
4 t
8 t
A
B
2 m
4 m
4 m
2 m
1.5m
1.5m
Ya = 33 t
Yb = 37 t
Maxwell Diagram

Figure (23)

قائمة المراجع :

1- " Introduction to mechanics of solids" EGOR P.POPOV, 1968 by Prentice – Hall, Inc.Englewood cliffs, Newjercy.

2- " Structural analysis", Harold.I.Laursen, 1969 by Megraw-Hill book Company.

3- " Elementary Theory of structures " Yuan-Yu-Hsieh, 1970 by Prentice-Hall, Inc.Englewood cliffs, NewJercy.

4- " Basic Structural analysis ", Kurt.H.Gerstle, 1974 by Prentice Hall, Inc.Englewood cliffs, NewJercy.

5- نظرية الإنشاءات المحددة الأستاتيكية " ١٩٧٨ أ.د/ محمد عبد الفتاح ديوان و أ.د/أحمد فهمي عبد الرحمن – كلية الهندسة – جامعة الإسكندرية.

6- " Theory of Structures " part 1 2002, El-Said Amin Mashally, Faculty of Engineering, Alexandria University.

7- " Theory of Structures " 2003, Amin Saleh Ali, Faculty of Engineering, Ain Shams University.